Analys 1, MVE535, vt2019, Föreläsning 7.1

Idag:

* Bisektionsalgoritmen
* Newtons metod
* Primitiva funktioner

Numeriska metoder:

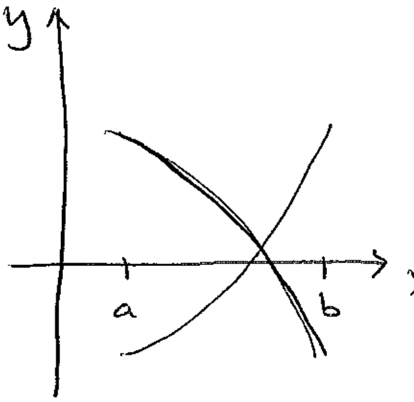
Syftet med den här kursen (och Analys del 2) är att studera funktioner analytiskt (dvs exakt matematiskt). Men dessvärre går många av de konkreta problem som man stöter på ute i "verkligheten" inte att lösa exakt. I dessa lägen kan man ibland m.h.a. datorer få fram approximativa lösningar. Algoritmer för sådana approximativa lösningar kallas för numeriska metoder. Vi ska studera två sådana algoritmer för att lösa ekvationer av formen $f(x) = 0$.

I. Bisektionsalgoritmen:

Givet: Ett intervall $[a,b]$ och en kontinuerlig funktion f som är definierad på $[a,b]$ och som även växlar tecken på $[a,b]$.

Sökt: Ett $x \in [a,b]$ sådant att $f(x) = 0$

Steg 1: Kolla att f verkligen växlar tecken på $[a, b]$

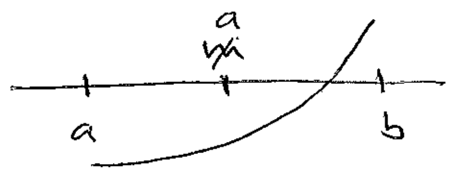


Görs enklast genom att kolla att

$$f(a) \cdot f(b) < 0$$

Steg 2: Ta fram mittpunkten m på intervallet $[a, b]$

$$m = \frac{a+b}{2}$$



Steg 3: Kolla f:s tecken i m

Om $f(m) = 0$, grattis!

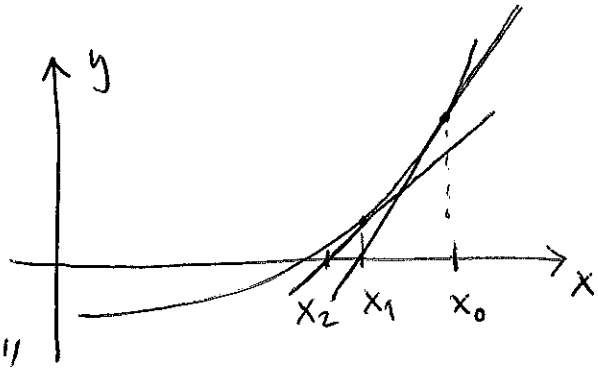
Om $f(m) \cdot f(a) < 0$, ersätt b med m

Annars, ersätt a med m

Upprepa nu steg 2 och 3 så länge som avståndet mellan a och b är stort, (dvs while(b-a > tolerans))

Bisektionsalgoritmens främsta fördelar är att f bara behöver vara kont. (ej deriverbar) och att algoritmen alltid fungerar (dvs konvergerar mot en lösning till $f(x) = 0$). Nackdelen är att den är långsam.

II. Newtons metod:



Givet: En startpunkt x_0 och en deriverbar funktion f som har ett nollställe "nära x_0"

Sökt: ~~xxx~~ Ett x sådant att $f(x) = 0$

Vet inte hur man beräknar en lösning till $f(x) = 0$.
Men om f hade varit en rät linje, då hade det gått bra!

Approximera f med dess tangentlinje i x_0.

Tangentlinje: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

Lös $y = 0 \iff f'(x_0)x - f'(x_0)x_0 = -f(x_0) \iff$

$$\iff f'(x_0)x = f'(x_0)x_0 - f(x_0)$$

$$\Rightarrow x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Kolla om detta x löser $f(x) = 0$. Om inte, upprepa proceduren men nu med x_0 ersatt av $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}, \ldots, x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}, \ldots$$

Algoritm: Givet x_0, f, f' och en tolerans, låt
$x = x_0$ (och $h = 1$)

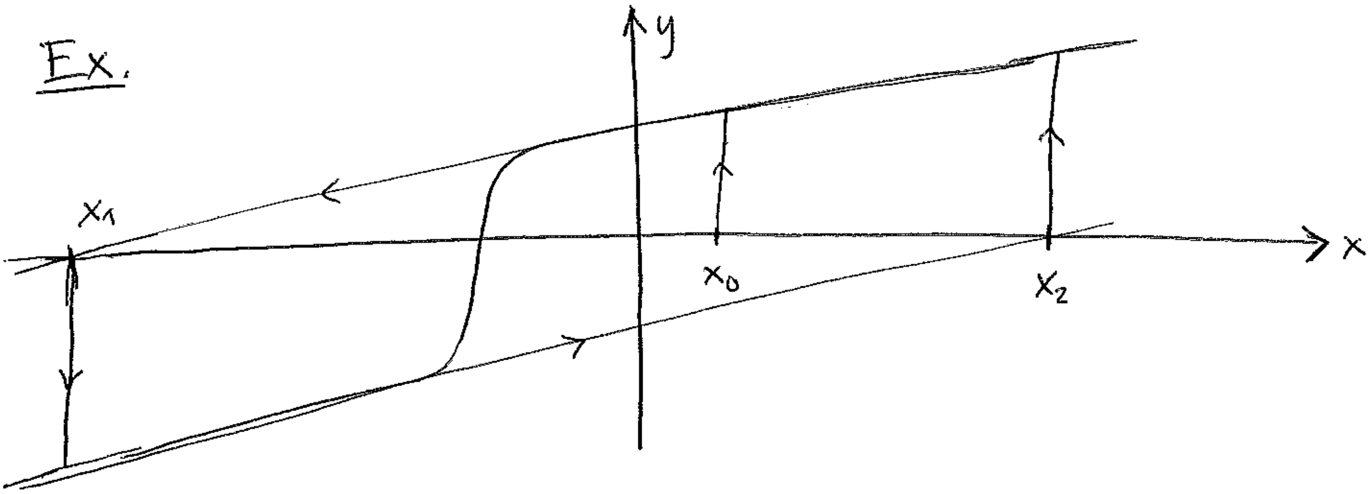
Steg 1: Låt $h = -f(x)/f'(x)$

Steg 2: Låt $x = x + h$

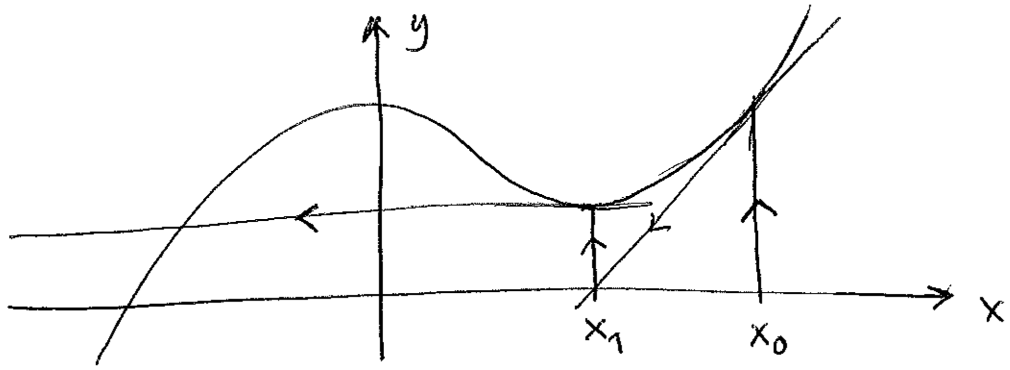
Upprepa nu steg 1 och 2 så länge som $|h| > \text{tolerans}$.
(dvs while(abs(h)>tolerans)).

Newtons metods främsta fördel är att den är extremt snabb. Nackdelen är (vid sidan av att f måste vara deriverbar) att den kan gå åt pipan om vi inte startar tillräckligt nära nollstället, eller om vi hamnar i en punkt x_k där $f'(x_k) \approx 0$.

Ex.



Ex.



Bisektionsalgoritmen är "idiotsäker" dvs den fungerar alltid, men den är långsam.

Newtons metod är snabb men den kan skita sig kapitalt.

"Moderna" algoritmer i matematisk mjukvara (såsom t.ex. fzero i MATLAB) kombinerar bisektion och Newton.

Primitiva funktioner: (4.9)

Vi har redan nämnt att för varje ny operation som vi inför får vi per automatik ytterligare en operation som är "tvärtom", dvs neutraliserar effekten av den första. För derivering kallas "tvärtom-operationen" för primitiv funktion:

Definition: En deriverbar funktion F sägs vara en primitiv till en funktion f på ett intervall (a,b) om

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a,b)$$

Vi skriver $F(x) = \int f(x)\,dx$.

Primitiva funktioner kallas ibland för anti-derivator.

Ex. Beräkna primitiv till:

(a) x^2 (b) $\sqrt{x}$ (c) $\sin(2x)$ (d) e^{3x}

(e) $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Lösn.: (a) $\int x^2\,dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Vilken/vilka fkner.} \\ \text{har derivata} = x^2\ ? \end{array} \right\} = \frac{x^3}{3} + C$

(b) $\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{1/2}\,dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} + C = \frac{2x^{3/2}}{3} + C$

(c) $\int \sin(2x)\,dx = -\frac{\cos(2x)}{2} + C$

(d) $\int e^{3x}\,dx = \frac{e^{3x}}{3} + C$

(e) Vet att: $\frac{d}{dx}\arccos(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arccos(x) + C$$

I allmänhet gäller att:

I. $\int x^{\alpha}\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1$

II. $\int e^{\beta x}\,dx = \frac{e^{\beta x}}{\beta} + C, \quad \beta \neq 0$

III. $\int \cos(\gamma x)\,dx = \frac{\sin(\gamma x)}{\gamma} + C, \quad \gamma \neq 0$

⋮

etc.

<u>Ex.</u> Beräkna $\int \frac{1}{x}\,dx$

<u>Lösn.</u>: Två fall: (i) <u>$x>0$</u>: Om $x>0$ så $\ln(x)$ väldef. och då $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$ så $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln(x)\ (+C)$

(ii) <u>$x<0$</u>: Om $x<0$ så $\ln(x)$ <u>ej</u> väldef. Däremot så är $\ln(-x)$ väldef. i detta fall, och då

$$(\ln(-x))' = \frac{1}{-x}\cdot -1 = \frac{1}{x} \quad \text{så} \quad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln(-x)\ (+C)$$

Sammantaget: $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|\ (+C)$ oavsett tecken på x!