

Analys 1, MVE 535, vt 2019, Föreläsning 7.2

Vi började kursen med att "repetera" algebraiska förenklingar, olikheter, absolutbelopp och linjer och cirklar.

Ex. Lös ekvationen $2|x+1| = 5+4x$ (*)

Lös.: Vi har två olika fall.

I. Antag att $x \geq -1$, dvs $|x+1| = x+1$

$$(*) \Leftrightarrow 2(x+1) = 5+4x \Leftrightarrow -3 = 2x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{3}{2} \cdot \nabla \text{ Falsk rot då } -\frac{3}{2} < -1.$$

II. Antag nu att $x < -1$, dvs $|x+1| = -(x+1)$

$$(*) \Leftrightarrow -2(x+1) = 5+4x \Leftrightarrow -7 = 6x \Leftrightarrow x = -\frac{7}{6} \text{ ok!}$$

$$\therefore \underline{\underline{x = -\frac{7}{6}}}$$

Ex. Cirkeln $x^2 + 10x + y^2 - 20y = 19$ är given

(a) Beräkna cirkelns centrum och radie.

(b) Beräkna y' i de punkter där $x = 0$.

Lös.: (a) $x^2 + 10x + y^2 - 20y = 19 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x^2 + 2 \cdot 5x + 5^2}_{(x+5)^2} + \underbrace{y^2 - 2 \cdot 10y + 10^2}_{(y-10)^2} = 19 + 5^2 + 10^2$$

$$\Leftrightarrow (x+5)^2 + (y-10)^2 = 144$$

$$\therefore \text{Centrum} = \underline{\underline{(-5, 10)}}. \text{ Radie} = \sqrt{144} = \underline{\underline{12}}$$

(b) Derivera $x^2 + 10x + y^2 - 20y = 19$ implicit

$$2x + 10 + 2y \cdot y' - 20y' = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 20y' - 2y \cdot y' = 2x + 10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2y'(10 - y) = 2(x + 5)$$

$$\therefore y' = \frac{x + 5}{10 - y}$$

Då $x = 0$ måste $y^2 - 20y = 19$ för att vi ska ligga på cirkeln.

$$y^2 - 20y - 19 = 0 \Rightarrow y = 10 \pm \sqrt{100 + 19} = 10 \pm \sqrt{119}$$

$\Rightarrow$ Vi har punkterna: ~~0, 10 + \sqrt{119}~~

$$P_1 = (0, 10 + \sqrt{119}), (0, 10 - \sqrt{119}) = P_2$$

$$y'|_{P_1} = \frac{0 + 5}{10 - (10 + \sqrt{119})} = -\frac{5}{\sqrt{119}}$$

$$y'|_{P_2} = \frac{5}{10 - (10 - \sqrt{119})} = \frac{5}{\sqrt{119}}$$

Efter att (mycket kort) ha introducerat ellipser, påbörjade vi studiet av funktioner. Vi såg hur funktioner definieras, kombineras och ibland även kan inverteras.

Ex. Låt $g(x) = \frac{x+1}{x}$ och $f(x) = \frac{x+4}{1-3x}$. Bestäm inversen till funktionen $f \circ g(x)$.

Lös.: $f \circ g(x) = f(g(x)) = \frac{\frac{x+1}{x} + 4}{1 - 3 \cdot \frac{x+1}{x}} = \frac{x+1+4x}{x-3x-3} = \frac{5x+1}{-2x-3}$

Låt $h = f \circ g$ så $h(x) = \frac{5x+1}{-2x-3}$. Om $h^{-1}(x) = y$

så $h(h^{-1}(x)) = h(y) \Leftrightarrow x = \frac{5y+1}{-2y-3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2xy - 3x = 5y + 1 \Leftrightarrow -3x - 1 = y(5 + 2x)$

$\Leftrightarrow y = \frac{-3x-1}{5+2x}$

$\therefore f^{-1}(x) = \frac{-3x-1}{5+2x}$

Ex. Låt $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ med $D_f = \mathbb{R}$. Visa att f är inverterbar.

Bevis: $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \cdot \frac{e^x}{e^x} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$

$$f'(x) = \frac{2e^{2x}(e^{2x}+1) - 2e^{2x}(e^{2x}-1)}{(e^{2x}+1)^2} =$$

$$= \frac{2e^{2x}(e^{2x}+1 - e^{2x}+1)}{(e^{2x}+1)^2} = \frac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2} > 0$$

$\Rightarrow f$ strängt växande $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ ~~monoton~~ injektiv på $\mathbb{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ inverterbar på $\mathbb{R}$ ■

Därefter var tiden kommen för att introducera det mycket centrala (och svåra) begreppet gränsvärde. Även om den formella definitionen visade sig vara mycket oaptitlig, lyckades vi ändå få en känsla för skillnaden mellan $x \rightarrow a$ och $x = a$, och lärde oss olika tekniker för beräkning av gränsvärden. I slutet av kursen lärde vi oss även l'Hospitals sats som gjorde många av dessa beräkningar avsevärt enklare.

Ex. Beräkna gränsvärdet (om det existerar)

(a) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\arctan(x) - \frac{\pi}{2} \right)$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\sin(x)} - \sqrt{1-\sin(x)}}{\tan(x)}$ $\leftarrow [\infty \cdot 0]$ $\swarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Lösning: (a) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\arctan(x) - \frac{\pi}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan(x) - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}} =$
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{x^2}{1+x^2} \stackrel{[\frac{\infty}{\infty}]}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{2x}{2x} = \underline{\underline{-1}}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+\sin(x)} - \sqrt{1-\sin(x)}) (\sqrt{1+\sin(x)} + \sqrt{1-\sin(x)})}{\tan(x) (\sqrt{1+\sin(x)} + \sqrt{1-\sin(x)})} =$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin(x) - 1 + \sin(x)}{\tan(x) (\sqrt{1 + \sin(x)} + \sqrt{1 - \sin(x)})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin(x)}{\frac{\sin(x)}{\cos(x)} (\sqrt{1 + \sin(x)} + \sqrt{1 - \sin(x)})} =$$

$$= \frac{2}{\frac{1}{1} (\sqrt{1} + \sqrt{1})} = \frac{2}{2} = \underline{\underline{1}}$$

