

Analys 1, MVE535, vt2019, Föreläsning 8.1

Ex. Låt $f(x) = x\sqrt{1+x}$ och bestäm ett approximativt värde på $f(3.1)$ med hjälp av linjärisering.

Lösn.: $x=3$ lämplig punkt att linjärisera kring

$$f'(x) = \sqrt{1+x} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \Rightarrow f'(3) = 2 + \frac{3}{4} = \frac{11}{4}$$

$$\text{Vet att: } L(x) = f'(3)(x-3) + f(3) =$$

$$= \frac{11}{4}(x-3) + \overset{6}{\cancel{6}} = \frac{11}{4}x - \frac{33}{4} + \overset{6}{\cancel{6}} = \frac{11x}{4} - \cancel{\frac{9}{4}}$$

$$\Rightarrow f(3.1) \approx L(3.1) = \frac{11 \cdot 3.1}{4} - \overset{9}{\cancel{\frac{9}{4}}} = \frac{34.1 - \overset{9}{\cancel{9}}}{4} = \frac{\cancel{25.1}}{4}$$

Innan vi kunde fortsätta med fler tillämpningar av derivator behövde vi först införa terminologi för extremvärden. För att kunna beräkna och klassificera dessa på ett effektivt sätt vi dock först tvungna att studera medelvärdessatsen, som visade sig vara nyckeln till en djupare förståelse för hur en funktion f beter sig, utifrån kännedom om f' och f'' .

Ex. Beräkna på vilka intervall funktionen

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$$

är växande resp. avtagande, samt konvex resp. konkav

Lösning: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2-1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2(3x^2-3-2x^2)}{(x^2-1)^2} =$$

$$= \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = -\sqrt{3}, x_2 = 0, x_3 = \sqrt{3} \leftarrow \text{Kritiska punkter}$

$$f''(x) = \frac{(4x^3-6x)(x^2-1)^2 - x^2(x^2-3)2(x^2-1) \cdot 2x}{(x^2-1)^4} =$$

$$= \frac{2x(x^2-1)((2x^2-3)(x^2-1) - 2x^2(x^2-3))}{(x^2-1)^4} =$$

$$= \frac{2x(2x^4-2x^2-3x^2+3-2x^4+6x^2)}{(x^2-1)^3} = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$$

$f''(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ ev. inflektionspunkt

		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$	
f'	+	0	-	ej def.	-	0	-	ej def.	-	0	+
f''	-		-	ej def.	+	0	-	ej def.	+		+

$\therefore f$ växande på $(-\infty, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, \infty)$

f avtagande på $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}] \setminus \{\pm 1\}$

f konkav på ~~$(-\infty, -1) \cup (0, 1)$~~ $(-\infty, -1) \cup [0, 1)$

f konvex på ~~$(-1, 0) \cup (1, \infty)$~~ $(-1, 0] \cup (1, \infty)$

Därmed hade vi alla verktyg vi behövde för att studera funktioner analytiskt, vare sig vi var intresserade av hur de såg ut, eller ville optimera dem.

Ex. Rita grafen till $f(x) = x + \ln(x^2 - 3)$

Lös.: Steg 1: $x^2 - 3 > 0 \quad \forall x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \infty)$

$$\Rightarrow D_f = \mathbb{R} \setminus [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$$

Steg 2: I. Lodräta asympt.:

$$\lim_{x \rightarrow -\sqrt{3}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\sqrt{3}^-} \left(x + \underbrace{\ln(x^2 - 3)}_{\rightarrow 0^+} \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}^+} \left(x + \underbrace{\ln(x^2 - 3)}_{\rightarrow 0^+} \right) = -\infty$$

$\Rightarrow x = -\sqrt{3}, x = \sqrt{3}$ lodräta asymptoter

II. Vågräta asympt.:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (x + \ln(x^2 - 3)) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(1 + \underbrace{\frac{\ln(x^2 - 3)}{x}}_{\rightarrow 0} \right) = -\infty$$

$\Rightarrow$ Inga vågräta asymptoter

III. Sneda asympt.:

$$k_{1,2} = \lim_{x \rightarrow \infty/-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty/-\infty} \left(1 + \frac{\ln(x^2 - 3)}{x} \right) = 1$$

$$m_{1,2} = \lim_{x \rightarrow \infty/-\infty} (f(x) - 1 \cdot x) = \lim_{x \rightarrow \infty/-\infty} \ln(x^2 - 3) = \infty$$

$\Rightarrow$ Inga sneda asymptoter!

Step 3: $f'(x) = 1 + \frac{2x}{x^2-3}$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{x^2-3} = -1 \Leftrightarrow 2x = 3 - x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = -1 \pm \sqrt{1+3} = -1 \pm 2$$

$$\Rightarrow x_1 = -3, x_2 = 1 \notin D_f \text{ falsk rot!}$$

Step 4: $f''(x) = \frac{2(x^2-3) - 2x \cdot 2x}{(x^2-3)^2} = \frac{-2x^2-3}{(x^2-3)^2} = -\frac{2x^2+3}{(x^2-3)^2}$

$f''(x) < 0 \quad \forall x \in D_f \Rightarrow$ Inga infleksjonspunkter
 $f(x)$ konkav $\forall x \in D_f$

Step 5:

	$-\infty$		-3		$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}^+$		∞
f'		+	0	-				+	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\uparrow$	$\searrow$	$-\infty$	g def.	$-\infty$	$\nearrow$	∞

$$f(-3) = -3 + \ln(9-3) = -3 + \ln(6)$$

Step 6:

