Anonym kod	MVE535/415 Matematisk Analys, Del 1 2019-08-27	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Bestäm alla reella tal x sådana att $|3x+2| < 3$. (2 p)

Lösning: $|3x+2|<3 \Leftrightarrow -3<3x+2<3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -5<3x<1 \Leftrightarrow -\frac{5}{3}<x<\frac{1}{3}$

Svar: $x \in \left(-\frac{5}{3}, \frac{1}{3}\right)$

(b) Lös ekvationen, (2 p)

$$\ln(3) - \ln(x) = \ln(x-4) - \ln(15). \quad (*)$$

Lösning: $(*) \Leftrightarrow \ln(3) + \ln(15) = \ln(x-4) + \ln(x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln(3\cdot 15) = \ln(x(x-4)) \Leftrightarrow 45 = x^2-4x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-4x-45=0 \Rightarrow x = 2 \pm \sqrt{4+45} = 2 \pm 7$

$\Rightarrow x_1 = 9$, $x_2 = -5 \leftarrow$ Falsk rot $\left(\begin{matrix}\ln(-5) \\ \ln(-5-4)\end{matrix}\text{ ej def.}\right)$

Svar: $x = 9$

(c) Beräkna gränsvärdet $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(3x))}{\ln(\cos(2x))}$. $\leftarrow \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ $=$ (2 p)

Lösning:

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos(3x)}\cdot(-\sin(3x)\cdot 3)}{\frac{1}{\cos(2x)}\cdot(-\sin(2x)\cdot 2)} = \lim_{x\to 0} \frac{3}{2}\cdot\frac{\cos(2x)}{\cos(3x)}\cdot\frac{\sin(3x)}{\sin(2x)} =$$

$$= \frac{3}{2}\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\cos(2x)}{\cos(3x)}}_{=1}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{\sin(2x)} \leftarrow \left[\frac{0}{0}\right] = \frac{3}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\cos(3x)\cdot 3}{\cos(2x)\cdot 2} = \frac{9}{4}$$

Svar: $9/4$

(d) Funktionen $f(x) = \ln(\sqrt{1+x^3})$ är inverterbar då $x > -1$. Bestäm $(f^{-1})'(\ln(3))$.(2 p)

Lösning: $f(f^{-1}(x)) = x \overset{D}{\Longrightarrow} f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1})'(x) = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

$f(x) = \ln((1+x^3)^{1/2}) = \frac{1}{2}\ln(1+x^3) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{3x^2}{2(1+x^3)}$

$f(2) = \ln(\sqrt{1+8}) = \ln(3) \Leftrightarrow f^{-1}(\ln(3)) = 2$

$\Rightarrow (f^{-1})'(\ln(3)) = \dfrac{1}{f'(2)} = \dfrac{2(1+8)}{3\cdot 4} = \dfrac{3}{2}$

Svar: $3/2$

(e) Bestäm $f'(0)$ då $f(x) = 3\sin(x + \tan(2x))$. (2 p)

Lösning: $f'(x) = 3\cos(x + \tan(2x)) \cdot \left(1 + \dfrac{1}{\cos^2(2x)} \cdot 2\right)$

$\Rightarrow f'(0) = 3\cos\left(0 + \dfrac{\sin(0)}{\cos(0)}\right) \cdot \left(1 + \dfrac{1}{\cos^2(0)} \cdot 2\right) =$

$= 3 \cdot \cos(0) \cdot \left(1 + \dfrac{2}{1^2}\right) = 3 \cdot 1 \cdot 3 = 9$

Svar: 9

(f) Bestäm en primitiv funktion (antiderivata) till $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$. (2 p)

Lösning: $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1} = \dfrac{x^2+1-1}{x^2+1} = \dfrac{x^2+1}{x^2+1} - \dfrac{1}{x^2+1} = 1 - \dfrac{1}{x^2+1}$

(Alternativt: Polynomdividera $\dfrac{x^2}{x^2+1}$)

$\Rightarrow \int f(x)\,dx = \int\left(1 - \dfrac{1}{x^2+1}\right)dx = x - \arctan(x) + C$

Svar: $x - \arctan(x)$

2. (a) $f(x) = \sqrt{(1-x)(x+5)}$ väldefinierad då $(1-x)(x+5) \geq 0$

		-5		1	
$x+5$	$-$	0	$+$		$+$
$1-x$	$+$		$+$	0	$-$
$(1-x)(x+5)$	$-$	0	$+$	0	$-$

ok!

$\therefore\ D_f = [-5, 1]$

(b) $3 - \sqrt{x-1} = \sqrt{4x+5} \Rightarrow (3-\sqrt{x-1})^2 = 4x+5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 9 - 6\sqrt{x-1} + x - 1 = 4x + 5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3 - 3x = 6\sqrt{x-1} \Leftrightarrow \cancel{3}(1-x) = 2\cdot\cancel{3}\sqrt{x-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow (1-x)^2 = 4\cdot(x-1) \Leftrightarrow 1 - 2x + x^2 = 4x - 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \Rightarrow x = 3 \pm \sqrt{9-5} = 3 \pm 2$

$\Rightarrow\ x_1 = 5,\ x_2 = 1$ potentiella lösningar

$\underline{x_1 = 5}$: $VL = 3 - \sqrt{5-1} = 3 - 2 = 1$

$HL = \sqrt{4\cdot 5 + 5} = \sqrt{25} = 5$ $\Rightarrow VL \neq HL$

$\Rightarrow\ x_1 = 5$ Falsk rot!

$\underline{x_2 = 1}$: $VL = 3 - \sqrt{1-1} = 3$

$HL = \sqrt{4\cdot 1 + 5} = \sqrt{9} = 3$ $\Rightarrow VL = HL$

$\therefore\ \underline{\underline{x = 1}}$

3. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2-1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2(3x^2-3-2x^2)}{(x^2-1)^2} =$$

$$= \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{(x^2-1)^2} \left(= \frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2} \right)$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = -\sqrt{3}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \sqrt{3}$ kritiska punkter

$$f''(x) = \frac{(4x^3-6x)(x^2-1)^2 - x^2(x^2-3)\cdot 2(x^2-1)\cdot 2x}{(x^2-1)^4} =$$

$$= \frac{2x\cancel{(x^2-1)}\big((2x^2-3)(x^2-1) - 2x^2(x^2-3)\big)}{(x^2-1)^{\cancel{4}3}} =$$

$$= \frac{2x(2x^4-2x^2-3x^2+3-2x^4+6x^2)}{(x^2-1)^3} = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$$

$f''(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ ev. inflektionspunkt

		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$	
f'	$+$	0	$-$	ej def.	$-$	0	$-$	ej def.	$-$	0	$+$
f''	$-$		$-$	ej def.	$+$	0	$-$	ej def.	$+$		$+$

$\therefore$ f växande på $(-\infty, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, \infty)$

f avtagande på $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}] \setminus \{\pm 1\}$

f konvex på $(-1, 0] \cup (1, \infty)$

f konkav på $(-\infty, -1) \cup [0, 1)$

4. <u>Steg 1</u>: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{5\}$

<u>Steg 2</u>: I. <u>Lodräta</u>: $\lim_{x \to 5^-} f(x) = \lim_{x \to 5^-} \frac{e^{3-x}}{x-5} = -\infty \quad \left(\text{"}\frac{e^{-2}}{0^-}\text{"} \right)$

$$\lim_{x \to 5^+} f(x) = \lim_{x \to 5^+} \frac{e^{3-x}}{x-5} = \infty \quad \left(\text{"}\frac{e^{-2}}{0^+}\text{"} \right)$$

$\Longrightarrow$ $x = 5$ lodrät asymptot

II. <u>Vågräta</u>: $\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{e^3 \cdot e^{-x}}{x-5} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^3}{e^x (x-5)} = 0$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^3 e^{-x}}{x-5} \leftarrow \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \to -\infty} \frac{-e^3 \cdot e^{-x}}{1} = -\infty$$

$\Longrightarrow$ $y = 0$ vågrät asymptot

III. <u>Sneda</u>:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^3 \cdot e^{-x}}{x^2 - 5x} \leftarrow \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \to -\infty} \frac{-e^3 \cdot e^{-x}}{2x-5} \leftarrow \left[\frac{-\infty}{-\infty}\right] =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{e^3 \cdot e^{-x}}{2} = \infty$$

$\Longrightarrow$ Inga sneda asymptoter

<u>Steg 3</u>: $f'(x) = \frac{-e^{3-x}(x-5) - e^{3-x} \cdot 1}{(x-5)^2} =$

$$= \frac{e^{3-x}(-x+5-1)}{(x-5)^2} = \frac{e^{3-x}(4-x)}{(x-5)^2}$$

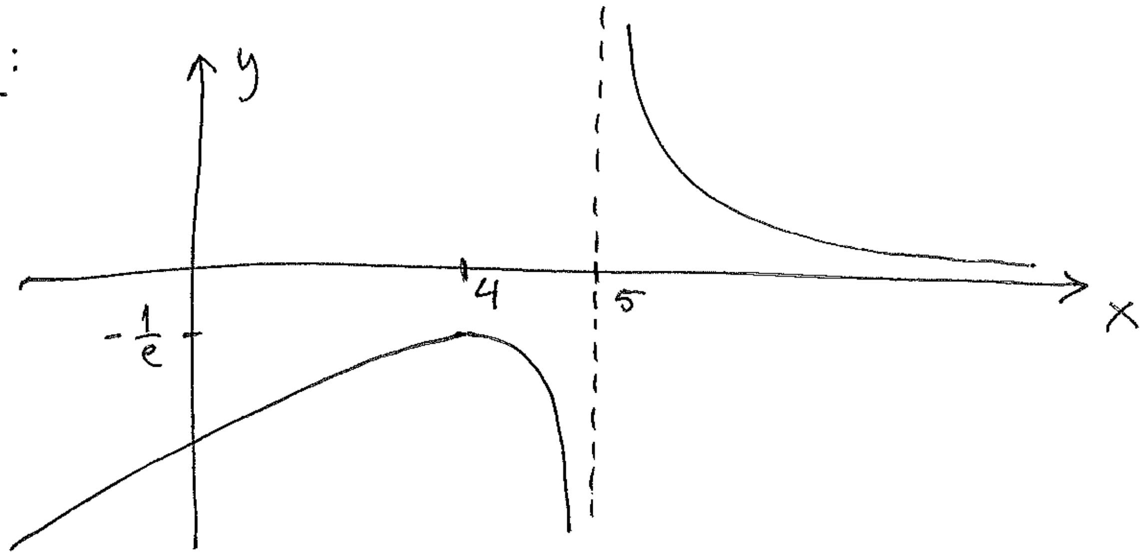
$f'(x) = 0 \Rightarrow e^{3-x}(4-x) = 0 \Longrightarrow x = 4$ Kritisk punkt

<u>Steg 4</u>: Behövs ej!

Steg 5:

	$-\infty$		4		5^-	5^+		∞
f'		$+$	0	$-$			$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$-e^{-1}$	$\searrow$	$-\infty$	∞	$\searrow$	0

Steg 6:



5. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(1-\frac{1}{x}-\arctan(x)\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(1-\frac{1}{x}-\arctan(x)\right) = \infty$$

Obs! Detta innebär inte att $V_f = \mathbb{R}$!

$$\lim_{x\to \infty} f(x) = \lim_{x\to \infty}\left(1-\frac{1}{x}-\arctan(x)\right) = 1-\frac{\pi}{2}$$

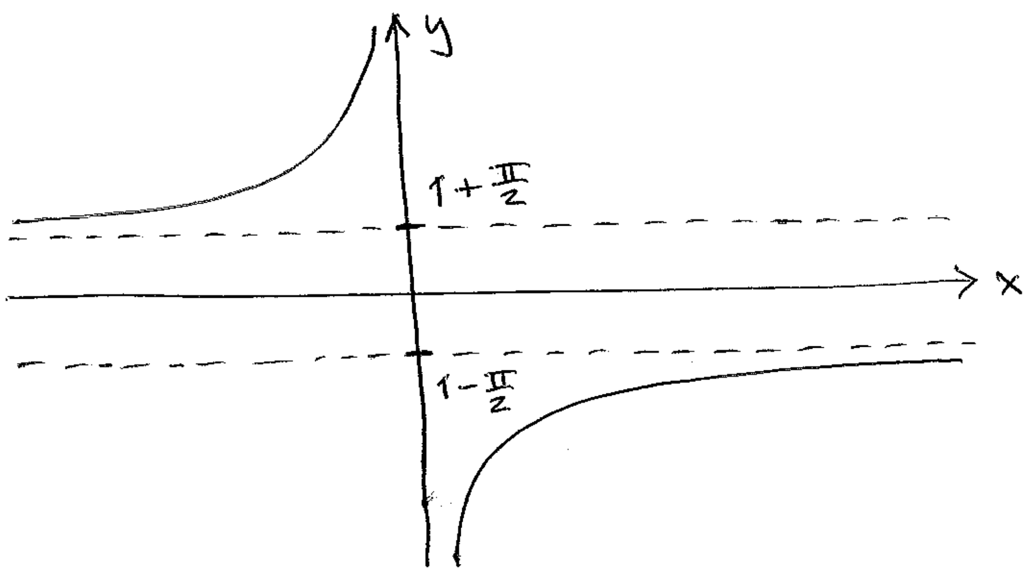
$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty}\left(1-\frac{1}{x}-\arctan(x)\right) = 1+\frac{\pi}{2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{1+x^2-x^2}{x^2(1+x^2)} = \frac{1}{x^2(1+x^2)} > 0 \quad \forall x \in D_f$$

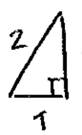
$\rightarrow$ f strängt växande $\forall x \in D_f$

	$-\infty$		0^-	0^+		∞
f'		$+$			$+$	
f	$1+\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	∞	$-\infty$	$\nearrow$	$1-\frac{\pi}{2}$

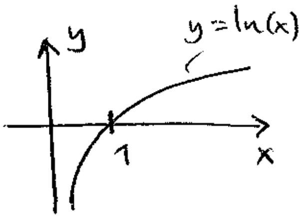
f har alltså följande graf:

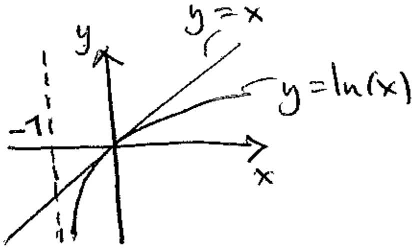


$\therefore V_f = (-\infty, 1-\frac{\pi}{2}) \cup (1+\frac{\pi}{2}, \infty)$

6. (a) $\arccos\left(\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \Bigg\{$  $\Bigg\} = \arccos\left(\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}\right) =$

$= \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6} \Longrightarrow$ Falskt

(b) 

$\Longrightarrow$ 

$\Longrightarrow$ Sant

(c) f definierad då $(x-2)(x-5) > 0$

		2		5	
$x-2$	$-$	0	$+$		$+$
$x-5$	$-$		$-$	0	$+$
$(x-2)(x-5)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\Longrightarrow D_f = (-\infty, 2) \cup (5, \infty)$

g definierad då $x > 2$ och $x > 5 \Longrightarrow D_g = (5, \infty)$

$D_f \neq D_g \Longrightarrow$ Sant

(d) $f(x) = -x^4 \Longrightarrow f$ min. i $x = 0$ men $f''(0) = 0$

$\Longrightarrow$ Falskt

(e) $f'(x) > 1 \;\; \forall x \in \mathbb{R} \Longrightarrow f$ strängt växande $\forall x \in \mathbb{R}$

$\Longrightarrow f$ injektiv på $\mathbb{R} \Longrightarrow f$ inverterbar på $\mathbb{R}$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{\underbrace{f'(f^{-1}(x))}_{>1 \;\forall x \in \mathbb{R}}} \Longrightarrow (f^{-1})'(x) < 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$\Longrightarrow$ Sant

(f) $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 8x + 20$

$f'(1) = 4 - 6 - 8 + 20 = 10$

$f'(2) = 4 \cdot 8 - 6 \cdot 4 - 8 \cdot 2 + 20 = 32 - 24 - 16 + 20 =$

$= 52 - 40 = 12$

$f'(x)$ polynom $\Rightarrow$ $f'(x)$ kont. $\forall x \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ {Satsen om mellanliggande värden} $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $f'(x)$ antar alla värden mellan 10 och 12 på $(1,2)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\exists c \in (1,2)$ sådan att $f'(c) = 11$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ <u>Sant</u>

$\therefore$ F S S F S S

7. (a) Tänk $y=y(x)$ och derivera implicit:

$$y + xy' + e^{x+y}(1+y') = 0 \qquad (*)$$

(x,y) kritisk punkt om $y'=0$ ← stoppa in detta i $(*)$

$$y + e^{x+y} = 0$$

Ser att $(x,y)=(1,-1)$ uppfyller

$$\therefore \ \underline{\underline{(1,-1)}}$$

(b) Derivera $(*)$ implicit:

$$y' + y' + xy'' + e^{x+y}(1+y')^2 + e^{x+y}\cdot y'' = 0$$

Stoppar vi in $x=1$, $y=-1$ och $y'=0$ får vi:

$$y'' + e^0\cdot 1^2 + e^0\cdot y'' = 0 \iff 2y'' = -1 \iff$$

$$\iff y''\big|_{(1,-1)} = -\frac{1}{2} < 0$$

$\therefore$ $(1,-1)$ max. punkt.

8. $f(x) = \begin{cases} x^3 - 12x + 1 & \text{om } x \geq 0 \\ x^3 + 12x + 1 & \text{om } x < 0 \end{cases}$

Kritiska punkter: Två fall:

$x \geq 0$: $f(x) = x^3 - 12x + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 12$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1 = 2 \quad , \quad x_2 = -2$ ← Falsk rot! (<0)

$f(2) = 8 - 24 + 1 = \underline{\underline{-15}}$

$x < 0$: $f(x) = x^3 + 12x + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 12$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 12 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -4$ Lösning saknas

Singulära punkter:

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \left\{ \begin{matrix} x \to 0^+ \Rightarrow \\ \Rightarrow x > 0 \end{matrix} \right\} = \lim_{x \to 0^+} (3x^2 - 12) = -12$$

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \left\{ \begin{matrix} x \to 0^- \Rightarrow \\ \Rightarrow x < 0 \end{matrix} \right\} = \lim_{x \to 0^-} (3x^2 + 12) = 12$$

$\lim_{x \to 0^+} f'(x) \neq \lim_{x \to 0^-} f'(x) \Rightarrow x = 0$ singulär punkt

$f(0) = \underline{\underline{1}}.$

Randpunkter: $f(-1) = -1 - 12 + 1 = \underline{\underline{-12}}$

$f(3) = 27 - 36 + 1 = \underline{\underline{-8}}$

$\therefore$ Max. värde: 1 (då $x = 0$)

Min. värde: -15 (då $x = 2$)