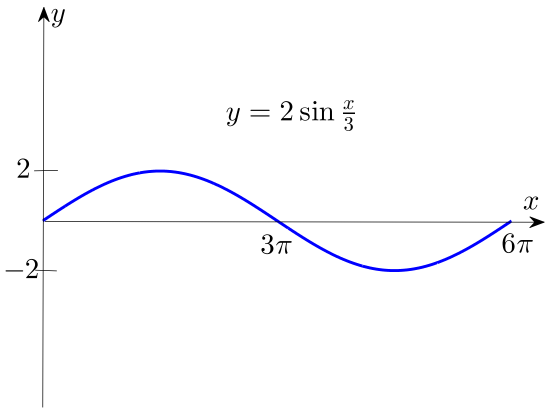
Lösningar och lösningstips till tenta för LNC022, 2015-08-24:

1. (a) Svar: $v \approx 33,8°$ eller $v \approx 146,2°$
   Räknaren föreslår $33,8°$, men det kan lika gärna vara supplementvinkeln $180 - 33,8°$.

   (b) Svar: $\approx 6,9°$

   Använd $\sin v = \frac{12}{100}$.

   (c) Kurva som skulle ritas (en period är $\dfrac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi$):



2. (a) Svar: 363 km/h och 512 km/h.

   Storleken av en vektor (a, b, c) är $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$; farten är storleken av hastighetsvektorn.

   (b) Svar: $101°$
   Använd $\cos\alpha = \dfrac{\boldsymbol{u} \bullet \boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|}$

   (c) Svar: 683 km/h.

   Relativa hastigheten är $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} = (172, -660, 27)$ (eller $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}$), farten är storleken av denna.

3. Svar: Vinklarna $84,3°$, $62,2°$, $33,6°$, arean $19,9$ cm^2, höjden mot sidan 9 är 4,4 cm (approximativa värden).

   Använd cosinussatsen för att beräkna den största vinkeln A (som står mot största sidan):

$$9^2 = 8^2 + 5^2 - 2 \cdot 8 \cdot 5 \cos A$$

   Det går bra att ta nästa vinkel med cosinussatsen också, men nu har vi klarat av den enda vinkel som kan vara trubbig, så vi kan ta sinussatsen och välja den spetsiga vinkeln som räknaren erbjuder. Den tredje vinkeln kommer ut av vinkelsumman. Arean ges av areasatsen, t ex:

$$T = \frac{5 \cdot 8 \sin A}{2}$$

   Om höjden mot sidan 9 är h, så använder vi

$$T = \frac{9 \cdot h}{2} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{2T}{9}$$

4. Svar: $8,11 \cdot 10^{13}$ km

   I den mycket spetsiga triangeln ABC ser vi att vinkeln vid Sirius är $C = 0,00021068°$. Sinussatsen ger:

$$\frac{BC}{\sin 86,19°} = \frac{299}{\sin 0,00021068°}$$

   med längdenmheten 10^6 km. Detta ger vårt svar.

5. Svar: fgv = 7,2, knop, fög = 6,3 knop.

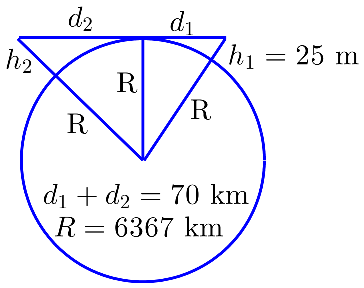
   I strömtriangeln är vinkeln mellan hastighetsvektorerna genom vatten och över grund $150° - 130° = 20°$, vinkeln mellan strömvektorn och hatighetsvektorn över grund är $250° - 150° = 100°$, återstående vinkel därmed $60°$. Sinussatsen ger oss då

$$\frac{fgv}{\sin 100°} = \frac{fög}{\sin 60°} = \frac{2,5}{\sin 20°}$$

   varmed vi får både fgv och fög.

6. Svar: 214 m.

Alla fakta är samlade i principskissen nedan. Observatören till höger, flygplanet till vänster. Det stod något om moln, men frågan kom att handla om flygplan, inte moln. Hoppas denna lilla miss (som upptäcktes lite sent) inte var alltför störande!



Det vi söker är planets höjd h_2. Med Pythagoras sats får vi först d_1:

$$d_1^2 = (R + h)^2 - R^2$$

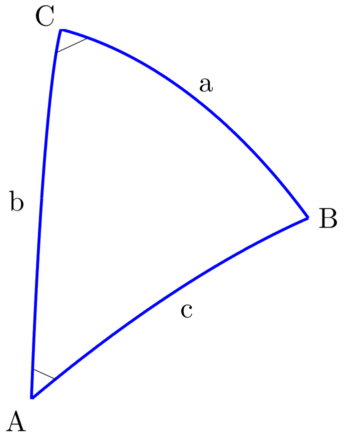
sedan har vi $d_2 = 70$ km $-d_1$, och Pythagoras igen:

$$(R + h_2)^2 = R^2 + d_2^2$$

ger oss $R + h_2$ och därmed h_2. Använd samma enhet hela vägen, t ex meter. Vi får $d_1 \approx 17842$ m, $d_2 \approx 52158$ m och $R + h_2 \approx 6367214$ m.

7. (a) Svar: B har latituden N$38°14'$, $W30°39'$

Använd den sfäriska triangeln med orterna A (start) och B (mål) och nordpolen C som hörn. Sidan c ges av distansen: $c = \frac{2000°}{60}$. Beräkna först med cosinussatsen (här Pythagoras) sidan a ($90° - a$ är då latituden för B). Med vinkeln $A = 90°$, sidorna a och c kan vi beräkna vinkeln C som är longituddifferensen mellan A och B. Figuren är inte skalenligt ritad.



$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

Härav får vi $A \approx 51,7668°$ och latituden för B blir $90° - a \approx 38,2332°$

$$\cos C = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b}$$

så vi har $C \approx 39,3476$ och latituden $70° - C \approx 30,6524°$.

(b) Svar: Inseglingskursen är $87,7°$.

Vi beräknar vinkeln B:

$$\cos B = \frac{\cos b - \cos a \cos c}{\sin a \sin c} \quad \Rightarrow \quad B \approx 92,2642°$$

Inseglingskursen är $180° - B$.

(c) Svar: Avståndet 2336 M och utseglingskursen 316°.

Nu lägger vi till orten D och betraktar den sfäriska triangeln ABD. I den känner vi redan två av sidorna: $AB = c = 2000/60°$ och $BD = 500/60°$. Dessutom kan vi beräkna vinkeln α vid B (där nämnda sidor möts): $\beta = 360° - 140° - B$. Då kan vi få sidan AD och vinkeln D med våra sfäriska triangelsatser:

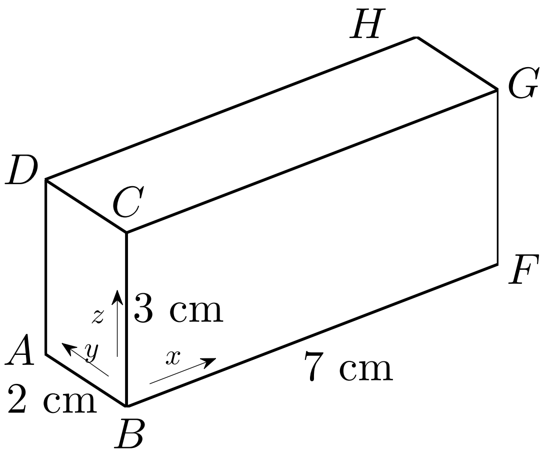
$$\cos(AD) = \cos(BD) \cos c + \sin(BD) \sin c \cos \beta \quad \Rightarrow \quad AD \approx 38,9291°$$

vilket motsvarar sträckan $AD * 60 \approx 2336$ M.

$$\cos D = \frac{\cos c - \cos(AD) \cos(BD)}{\sin(AD) \sin(BD)} \quad \Rightarrow \quad D \approx 43,7571$$

vilket ger utseglingskursen $360 - D \approx 316°$.

8. Vi inför en ON-bas med riktningar utgående från B, så som visas i figuren. Vi kan då räkna med vektorer givna med koordinater.



(a) Svar: $54,5^\circ$

Våra diagonaler som vektorer: $\vec{BH} = (7, 2, 3),\ \vec{DF} = (7, -2, -3)$. Med skalärprodukten får vi vinkeln α mellan dessa:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{BH} \bullet \vec{DF}}{|\vec{BH}||\vec{DF}|} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 54,5^\circ$$

(b) Svar: arean är cirka 13 cm^2.

Vi kan använda areasatsen. Då behöver vi längderna av två sidor och vinkeln mellan dem. $\vec{BD} = (0, 2, 3),\ \vec{BG} = (7, 0, 3)$ Om vinkeln mellan dessa vektorer är v, så får vi

$$T = \frac{1}{2}|\vec{BD}||\vec{BG}|\sin v$$

och

$$\cos v = \frac{\vec{BD} \bullet \vec{BG}}{|\vec{BD}||\vec{BG}|}$$

och med trigonometriska ettan ($\sin v > 0$):

$$\sin v = \sqrt{1 - \cos^2 v}$$

Man kan räkna ut stegen var för sig, men om man kombinerar dem så får man en fin formel:

$$T = \frac{1}{2}|\vec{BD}||\vec{BG}|\sqrt{1 - \cos^2 v} = \frac{1}{2}\sqrt{|\vec{BD}|^2|\vec{BG}|^2 - (\vec{BD} \bullet \vec{BG})^2} \approx 12,97$$