Konstruktionsövning 4. Partiella differentialekvationer

Betrakta följande begynnelsevärdesproblem för Burgers ekvationen

$$u_t + u \cdot u_x - \frac{1}{Re} u_{xx} = 0,$$

där $u = u(t, x)$, $x \in [0, L]$, $t \in [0, T]$, Re är en konstant.

Begynnelsevillkoret är $u(0, x) = u_0(x)$ där u_0 har formen av en chockvåg:

$u_0(x) = 1$ för $x \in [0, L/8]$ och $u_0(x) = 0$ för $x \in (L/8, L]$.

Randvillkoren är:

$u(t, 0) = 1, \qquad u(t, L) = 0.$

Den skarpa startprofilen u_0 omvandlas efter en stund i en mer glatt våg som kommer att röra sig till höger utan att ändra sin form. Formen av denna våg beror av Re numret.

Uppgifter.

Gör en likformig indelning av intervallet $[0, L]$ i n likadana intervall med längderna $\Delta x = L/n$.

Ersätt derivatorna med avseende på x med differenskvoter och lös det uppkomna systemet av ODE med två metoder: med *ode45* i MATLAB och med Eulers metod. Använd programmet *diags* i MATLAB för att lättare skapa nödvändiga matriser.

Tag $L = 100$ och $n = 100$. Tidsintervallet av intresse är $0 \leq t \leq T$ med $T = 90$.

Kör följande varianter av problemet:

med Eulers metod:

$Re = 0.5$, och antalet tidssteg $m = 1000$ och 440;

$Re = 30$, och antalet tidssteg $m = 1000$ och 73;

med *ode45* :

$Re = 0.5$, och $Re = 30$.

Finna de kritiska värden på $\Delta t = T/m$ för vilka Eulers metod förlorar stabilitet.
Rita upp grafer för $u(t_k, x)$ vid några lämpliga tidpunkter t_k på tidsintervallet $[0, 90]$ för att se hur lösningen ändras med tiden och hur olika approximationer beter sig.
Resultat för olika värden på Re numret, rita upp på två olika bilder.
Rita också upp bilder med grafen av $u(t, x)$ som funktion av två variabler och grafen med nivåkurvor till $u(t, x)$. Använd programmen *surf* , *plot3* , *contour* i MATLAB för detta.

Beskriv, vilka kombinationer av parametrar i Eulers metod som påverkar dess stabilitet.