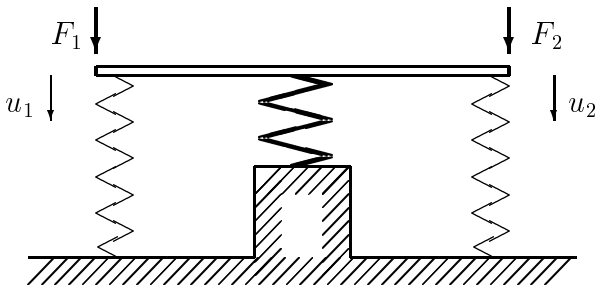
Konstruktionsövning 1. Linjära ekvationer. Minstakvadrat- o. egenvärdesproblem

Uppgift 1. Betrakta fjädersystemet



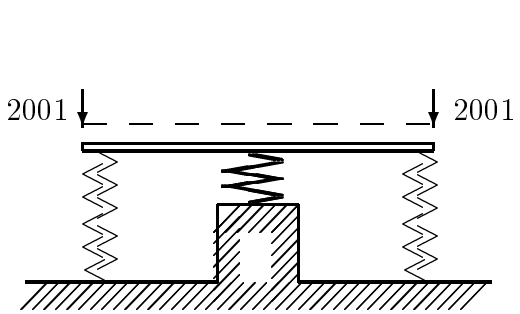
En balk är upplagd på en central fjäder med styvhet $k_0 = 4000$ och två sidofjädrar med styvhet $k_1 = k_2 = 1$, de senare för att motverka rotation. Vid lasterna F_1 och F_2 får vi förskjutningarna u_1 och u_2 från balkens neutralläge.

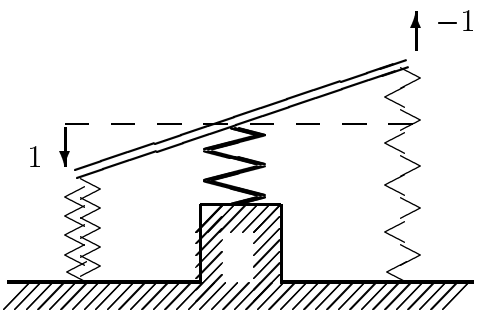
Systemets totala energi ges av

$$E(u_1, u_2) = \frac{k_1}{2}u_1^2 + \frac{k_2}{2}u_2^2 + \frac{k_0}{2}\left(\frac{u_1 + u_2}{2}\right)^2 - F_1u_1 - F_2u_2$$

Jämvikt får vi då energin har sitt minimum, dvs. då $\nabla E(u_1, u_2) = 0$.

När krafterna är lika eller nästan lika är systemet instabilt, små förändringar i krafterna ger avsevärda förändringar i förskjutningarna. För vissa andra förhållande mellan krafterna, som till höger i figuren, är problemet stabilt. Stora förändringar i krafterna ger då marginella förändringar i förskjutningarna.





Bestäm förskjutningarna u_1 och u_2 för givna laster F_1 och F_2. Experimentera med olika störningar på F_1 och F_2. Var blir det för förändringar i u_1 och u_2. Jämför med störningsteorin. Lagra matrisen som en tät matris.

Med $u = (u_1, u_2)$ och $F = (F_1, F_2)$ säger störningsteorin att $\frac{\|\delta u\|}{\|u\|} \leq \kappa(A)\frac{\|\delta F\|}{\|F\|}$ där δu är förändringen i förskjutningarna, δF är störningen i lasterna, A är systemmatrisen och $\kappa(A)$ är dess konditionstal.

Beräkna konditionstalet. Använd två av följande metoder: i) med *cond* i MATLAB; ii) med information om singulära värden till A; iii) med att undersöka verkandet av matrisen A på några slumpvisa vektorer.

Singulära värden till en matris beräknas med *svd* i MATLAB. Slumpvisa vektorer kan produceras med *rand* i MATLAB.

Uppgift 2. Här följer en tabell över medeltemperaturen under 1931-1960 för årets tolv månader i Göteborg respektive Karesuando.

Mån	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Gbg	-1.8	-2.0	0.7	5.4	10.8	14.8	17.0	16.3	12.5	8.0	3.9	1.1
Kso	-14.0	-13.9	-9.9	-3.6	3.0	9.8	13.7	11.2	5.4	-1.6	-7.3	-11.2

Ni kan ta indata direkt från hemsidan:

http://www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/tda160/0001/Karesuando.html

Eftersom detta är ett periodiskt förlopp skall vi anpassa följande modell till mätdata,

$$y(t) = c_0 + c_1 \sin(\omega t) + c_2 \cos(\omega t).$$

Välj ett lämpligt värde på ω och bestäm c_0, c_1 och c_2 med minsta kvadratmetoden. Använd två metoder: i) metoden med normalekvation, ii) kommandot \ i MATLAB. Vad får koefficientmatrisen för intressant egenskap? Rita grafen av funktionen $y(t)$ och markera mätdata i samma bild så att man kan se om modellen ansluter väl till mätdata. Använd *plot* på formen *plot(x,y, '+red')* med olika markeringar (*'oblue'*, *'-.green'*) o.s.v. i MATLAB och *hold on* före ritningen för att få olika grafer på samma bild.

Hur mycket senare (ungefär) kommer våren i norr och hur mycket tidigare kommer hösten?

Uppgift 3. Utböjningen v hos en ledlagrad stav av längd L som belastas med lasten P beskrivs av följande egenvärdesproblem för en ordinär differentialekvation

$$\begin{cases} EI\, v'' + Pv = 0,\ 0 < x < L, \\ v(0) = v(L) = 0, \end{cases}$$

där EI är böjstyvheten.

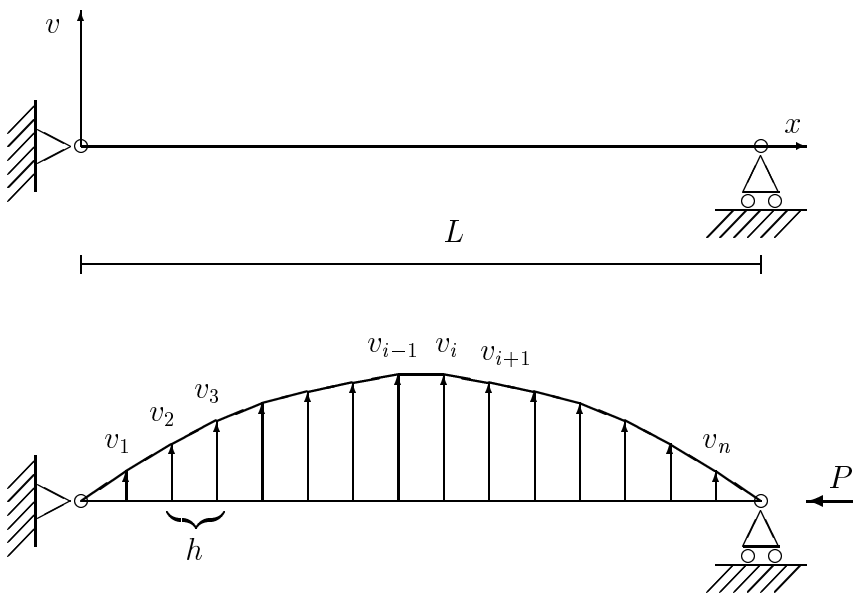
Vi diskretiserar problemet genom att införa en ekvidistant indelning av intervallet, $x_i = ih, i = 1, \cdots, n$ med $h = \frac{L}{n+1}$ och använda en centraldifferensapproximation av derivatan. Låter vi v_i beteckna approximationen av $v(x_i)$ får vi

$$\begin{cases} v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1} + h^2 \frac{P}{EI} v_i = 0 \quad i = 1, 2, \cdots, n \\ v_0 = v_{n+1} = 0 \end{cases}$$

Med matriser kan detta skrivas $Av = \lambda v$ där

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{n-1} \\ v_n \end{bmatrix} \quad \text{och } \lambda = h^2 \frac{P}{EI}$$

Matrisen kan lagas in med hjälp av *spdiags* i MATLAB eller med något eget programm. Använd *spy* i MATLAB för att kontrollera matrisens struktur.



Uppgifter

(a). Bestäm den lägsta kritiska lasten med inversiteration. Det räcker med $n = 20$ nodpunkter för att ge en hygglig approximation av egenfunktionen till det förstaegenvärdet. Använd skiftet $\mu = 0$, eftersom det är egenvärdet närmast noll vi vill bestämma.

Gör en tabell så att man ser att egenvärdesapproximationen konvergerar. Ange lägsta kritiska lasten och rita med hjälp av *plot* i MATLAB första bucklingsmoden.

(b). Använd nu *eigs* i MATLAB för att beräkna och rita upp de tre första bucklingsmoderna. Det räcker med $n = 30$ nodpunkter för att ge en hygglig approximation av egenfunktionerna till det första, andra respektive tredje egenvärdet.

(c). Bestäm konditionstalet för matrisen A på ett av följande sätt.
i) Använd *cond* i Matlab ; ii) utnyttja egenvärdena till A som du redan bestämt.

Man skall kunna förklara detaljer i algoritmer och matematisk betydelse av särskilda steg i dessa för att klara examenation efter labbar !

Nyckelbegrepp man skall kunna förklara: LU faktorisering, konditionstal, kvadratisk form, Raleighs kvot, egenvärde, egenvektor, singulärvärde, sambandet mellan egenvärden och kvadratiska former, minstakvadratlösning, normalekvation .