Chalmers Tekniska Högskola | **M2 - ht 2000**
Matematik

Konstruktionsövning 3. Ordinära differentialekvationer (ODE). Begynnelsevärdesproblem.

Sista dagen för redovisning är **Måndag den 2 Oktober.**
Vid redovisningen måste alla i gruppen kunna svara på **frågorna** i uppgifterna.

Uppgift 1.

I den här uppgiften skall vi studera en första ordningens ODE

$$y' = -10(t-1)y$$

på intervallet $(0, 3)$. Vi kommer att undersöka ekvationens stabilitetsegenskaper i olika områden. Sen undersöker vi Eulers metod och dess stabilitetsegenskaper för olika tidssteg.

a) Undersök först systemets beteende med hjälp av exakta lösningar. Skriv upp en allmän exakt lösning till ekvationen och rita upp en bild med flera lösningskurvor för olika begynnelsevärden.

Frågor.

Kommer de lösningar som startar från punkterna $t = 1$, $y(1) = 14,\ 10,\ 6$, att bli stabila ?

Kommer de lösningarna som startar från punkterna $t = 0$, $y(0) = 0.05,\ 0.08,\ 0.1$, att bli stabila ?

Vilken del i högerledet $-10(t-1)y$ gör att lösningskurvorna har det speciella utseendet på bilden ?

b) Undersök Eulers metods beteende med tidstegen 0.1 och 0.2 för att approximera de lösningar som startar från punkten $t = 1$, $y(1) = 14$ och löser problemet t.o.m. $t = 3$. Använd även en mindre steglängd för att visa metodens konvergens mot den exakta lösningen.

Rita approximativa lösningar tillsammans med den exakta lösningen i samma bild.

Frågor.

Är approximationsmetoden stabil i alla fallen ? Varför inte ?

Vänd !

Uppgift 2.

I den här uppgiften skall vi studera ett system av två första ordningens ordinära differentialekvationer.

$$y' = Ay$$

där $y \in R^2$ och A en 2×2 matris.

Vi undersöker systemets beteende nära origo $y = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, som är en stationär punkt till systemet.

Betrakta fyra varianter av problemet med olika matriser A. Matriserna skall skapas på följande sett: tag en slumpvis matris med A= *randn(2,2)* kommandot i Matlab så att alla får olika resultat !

Använd *ode45* kommandot i Matlab för att lösa ekvationssystemet på ett lämpligt tidsintervall. Lös systemet för minst fyra olika begynnelsevärden.

Skapa för varje valdmatris en bild som innehåller:

- ett riktningsfält $\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix}$ med Matlab kommandot *quiver*.
- de fyra lösningskurvorna där $y_1(t)$ plottas mot $y_2(t)$,

För olika matriser skapas nya bilder med Matlab kommandot $figure(N)$.

Beräkna egenvärden och egenvektorer till matrisen A. Rita upp egenvektorer på samma bild som riktningsfältet.

Tag begynnelsevärden till lösningar direkt från bilden med riktningsfältet med hjälp av *ginput* i Matlab för att få mera intressnata lösningskurvor.

Frågor.

Välj för redovisningen fyra sådana varianter att matriserna A har kvalitativt olika egenvärden.

För varje variant bestäm följande: Av vilken typ är systemets stationära punkt i origo (knut, spiral, sadelpunkt) ? Är denna stabil eller instabil ?

Förklara lösningarnas beteende med hjälp av bilderna och med hjälp av A - matrisens egenvärden och egenvektorer.