Lösningen till Uppgift 2 i Övningstentan i Numerisk Analys.

Uppgift 2. Betrakta matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0.001 \\ 200 & 5 \end{bmatrix}$$

a) Beräkna någon norm av matrisen samt uppskatta konditionstalet av matrisen. **(3p)**

b) Uppskatta det relativa felet i lösningen till ekvationen

$$Ax = b$$

om högerledet b är givet med ett fel $\quad b = \begin{bmatrix} 0.015 \\ 1 \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} -0.001 \\ 0.000015 \end{bmatrix}$. **(2p)**

Lösningen

Vi beräknar alla normer vi kan.

$$\|A\|_1 = 203; \quad \|A\|_\infty = 205;$$

För att beräkna $\|A\|_2$ behöver man beräkna det maximala singulära värdet till A. Den analys ger samtidigt det minimala singulära värdet och konditionstalet med avseende på euclidiska normen. Betrakta

$$A^T A = \begin{bmatrix} 3 & 200 \\ 0.001 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0.001 \\ 200 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40009 & 1000.003 \\ 1000.003 & 25.000001 \end{bmatrix}$$

Karakteristiska polynomet till denna är

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 40034\lambda + 219$$

Rötterna till detta är $\lambda_1 \approx 40033.99452$ och $\lambda_2 \approx 0.0054713501$

Deras positiva rötter är singulära värdena till A: $\sigma_1 = 200.084968$ och $\sigma_2 = 0.073968575$. Detta medför att

$$\|A\|_2 \approx 200.0849; \|A^{-1}\|_2 \approx (0.073968575)^{-1} \approx 13.5192$$

och

$$cond(A) \approx 2705$$

Man kan också direkt invertera matrisen A och beräkna konditionstalet med avseende på de två andra normer $\|...\|_1$, $\|...\|_\infty$,

b) Relativa felet i lösningen uppskattas på följande sett:

$$\frac{\|\delta x\|_2}{\|x\|_2} \leq cond(A) \frac{\|\delta b\|_2}{\|b\|_2}$$

Insättningen av konkreta siffror ger att

$\|b\|_2 = \sqrt{1 + 0.015^2} \approx 1$, $\|\delta b\|_2 = \sqrt{0.001^2 + 0.000015^2} \approx 0.001$,

$$\frac{\|\delta x\|_2}{\|x\|_2} \leq 2705 \cdot 0.001 = 2.705$$

Man kan se att det stämmer om man beräknar exakta lösningar med givna störningar i b.

$Ax = b$ har lösningen $x = [0.005, 0]$.

$Ay = (b + db)$ har lösningen $y = [0.00466, 0.01352]$.

Vi ser att $\frac{\|y-x\|}{\|x\|_2} \approx 2.704$