Lösningen till Uppgift 3 i Övningstentan i Numerisk Analys.

Uppgift 3.

a) Betrakta ekvationen

$$ax + \sin(\exp(-x)) = 0.$$

Transformera den så att metoden med fixpunkstiteration kan användas med $a = 4.00$. Motivera varför konvergensen äger rum. **(3p)**

b) Använd fixpunktsiterationer för att bestämma en lösning till denna ekvation med 3 korrekta decimaler. **(2p)**

b) Antag att koefficienten a vid x är given bara med 3 rätta siffror. Uppskatta absoluta och relativa felen i lösningen, som framkommer på grund av detta **(2p)**

Lösningen

Man kan använda formen

$$x = -1/4 \sin(\exp(-x))$$

för att bygga fixpunktsiterationer.

$$x^{k+1} = -1/4 \sin(\exp(-x^k))$$

Man kan upptäcka från grafen till funktionen $-1/4 \sin(\exp(-x))$ att det skall vara en negativ lösning till denna ekvation ganska nära noll. Det samma ser man från en analystisk undersökning av funktionen $-1/4 \sin(\exp(-x)) - x$. Denna är monoton i intervallet $[-1, 1]$ och positivt i punkten $x = -1$ och är negativ i punkten $x = 1$.

Derivatan av $-1/4 \sin(\exp(-x))$ är lika med

$-1/4 \cos(\exp(-x)) \exp(-x)$ och är mindre än 1 i absolut belopp i ett intervall kring $x = 0$ där det skall finnas en rot. Tag noll som startapproximation och beräkna iterationer. Delsresultat blir

$y = 0$, $y = -0.2104$, $y = -0.2360$, $y = -0.2385$, $y = -0.2387$, $y = 0.2387$. Man får tre exakta siffror efter dessa steg.