Lösningen till Uppgift5 i Övningstentan i Numerisk Analys.

Uppgift 5. Antag att vi vill lösa randvärdesproblemet

$$y'' + \cos(y') = 0,\ x \in (0,1); \quad y(0) = 1.5;\ y(1) = 0.5;$$

a) Diskretisera problemet på lämpligt sätt. Ange det uppkomna ickelinjära ekvationssystemet.

(2p)

Extra poäng för att göra det samma i fallet med andra randvillkoret $y'(1) = 2$.

(1p)

b) Skriv upp detta ekvationssystem för steglängden $h = 1/3$ och formulera Newtons metod för detta system. Ange Jacobimatrisen som uppträder i detta fall.

(2p)

Lösningen till b)

Inför en indelning i tre intervall med längderna $h = 1/3$, och punkterna $x_0 = 0$, $x(1) = 1/3$, $x_2 = 2/3$, $x_3 = 1$ Approximationer till $y(x_i)$ betecknas med y_i, $i = 0,1,2,3$. $y_0 = 1.5$ och $y_3 = 0.5$ är givna av randvillkoren.

Efter diskretiseringen av derivator ingående i ekvationer i inre punkter fås fäljande ekvationer.

$$\frac{(y_0 - 2y_1 + y_2)}{(1/3)^2} + \cos\left(\frac{y_2 - y_0}{2/3}\right) = 0$$
$$\frac{(y_1 - 2y_2 + y_3)}{(1/3)^2} + \cos\left(\frac{y_3 - y_1}{2/3}\right) = 0$$

Insättningen av randvillkoren ger

$$\frac{(1.5 - 2y_1 + y_2)}{(1/3)^2} + \cos\left(\frac{y_2 - 1.5}{2/3}\right) = 0$$
$$\frac{(y_1 - 2y_2 + 0.5)}{(1/3)^2} + \cos\left(\frac{0.5 - y_1}{2/3}\right) = 0$$

Detta ickelinjära systemet kan lösas med Newtons metod. Om vi inför beteckningarna

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \qquad F = \begin{bmatrix} \frac{(1.5-2y_1+y_2)}{(1/3)^2} + \cos\left((y_2 - 1.5)1.5\right) \\ \frac{(y_1-2y_2+0.5)}{(1/3)^2} + \cos\left((0.5 - y_1)1.5\right) \end{bmatrix}$$

så kan Newtons metod formuleras på följande sett

$$Y^{k+1} = Y^k - J^{-1}F(Y^k)$$

Där Jacobi matrisen J definieras av $J_{ij} = \frac{\partial^2 F(Y)}{\partial y_i \partial y_j}$. Konkreta formler i detta fall är följande:

$$J_{11} = -18, \qquad J_{12} = 9 - \sin\left((y_2 - 1.5)1.5\right)1.5,$$

$$J_{21} = 9 + \sin\left((0.5 - y_2)1.5\right)1.5, \qquad J_{22} = -18$$