Chalmers **CTH HT-2000**

Matematik

Övningstenta N 2 i Numerisk Analys för M2, TDA160

Betyggränser: 12, 16, 20 poäng. Tentan omfattar totalt 25 poäng.

Hjälpmedel: Valfri räknare, formelsamling och Beta. Anteckningar är ej tillåtna.

Uppgifterna står inte enligt svårighetsordning. Börja med dem som verkar vara lättare!

Uppgift 1. Betrakta matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 33.6 & 48.2 \\ 46.2 & 66.4 \end{bmatrix}$$

a) LU faktorisera matrisen A samt beräkna inversen. Beräkna $\|A\|_1$ normen av matrisen A samt konditionstalet av matrisen A svarande mot den normen. **(2p)**

b) Uppskatta det relativa felet i lösningen till ekvationen

$$Ax = b; \quad b = \begin{bmatrix} -0.809 \\ 0.588 \end{bmatrix}$$

om elementena i matrisen A är givna med tre korrekta siffror. **(3p)**

Svar: a) $A = LU$, där $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1.375 & 1 \end{bmatrix}$, $U = \begin{bmatrix} 33.6 & 48.2 \\ 0 & 64.97 \end{bmatrix}$. $A^{-1} \approx \begin{bmatrix} 15.8095 & -11.4762 \\ -11 & 8 \end{bmatrix}$.

$\|A\|_1 = 114.6$, $\|A^{-1}\|_1 \approx 26$. $\text{cond}(A) \approx 2980$.

b) $\|\delta x\|_1 \leq \text{cond}(A)\|\delta A\|_1/\|A\|_1 = 2980*(0.05 + 0.05)/114 \approx 2.6$;

Uppgift 2. Betrakta ekvationsystem

$$x^3 - y^2 - 1 = 0$$
$$xy^3 - y - 4 = 0$$

a) Använd Newtons metod för att bestämma lösningen med tre korrekta siffror. Använd start approximationen $x^0 = 1.5$, $y^0 = 1.5$. **(3p)**

b) Antag att koefficienten 1 vid x^3 är given bara med 2 korrekta siffror. Uppskatta absoluta och relativa felen i lösningen, som framkommer på grund av detta **(2p)**

Svar: a) $x = 1.502$, $y = 1.546$

b) $\delta x = 0.002986$, $\delta y = -0.001129$.

Uppgift 3. Betrakta följande begynnelsevärdesproblem.

$$y' = \frac{y + \sqrt{t^2 + y^2}}{t} = 0; \quad y(1) = 0$$

a) Bestäm en approximation till $y(1.3)$ med hjälp av Heuns metod. Använd steglängden $h = 0.1$. Redovisa delsresultat! **(3p)**

b) Gör det samma med Eulers metod. **(2p)**

Svar och delsresultat: $t = 1$, $y = 0$, $k1 = 1.0000$, $k2 = 1.0950$.

$t = 1.1$, $y = 0.1048$, $k1 = 1.0998$, $k2 = 1.1948$.

$t = 1.2$, $y = 0.2195$, $k1 = 1.1995$, $k2 = 1.2946$.

$t = 1.3$, $y = 0.3442$

Vänd !

Uppgift 4. Antag att vi vill lösa randvärdesproblemet

$$y'' - (x+1)(y') - y = \frac{2}{(x+1)^3}, \quad x \in (0.5, 1); \quad y(0.5) = 2/3; \; y(1) = 0.5;$$

a) Diskretisera problemet på lämpligt sätt. **(3p)**
b)Tag steglängden $h = 1/6$. Ange det diskreta problemet i detta fall och lös detta

Lösningsledning:

a)

$$-2u_1 + u_2 - (1/12)(0.5 + 1/6 + 1)(u_2 - 2/3) - (1/36)u_1 = (1/36)\frac{2}{(0.5 + 1/6 + 1)^3} + 2/3$$

$$-2u_2 + u_1 - (1/12)(0.5 + 1/3 + 1)(0.5 - u_1) - (1/36)u_2 = (1/36)\frac{2}{(0.5 + 1/3 + 1)^3} + 0.5$$

Motsvarande system har formen $Au = b$ med matrisen $A = \begin{bmatrix} -2.0278 & 0.8611 \\ 0.8472 & -2.0278 \end{bmatrix}$ och vektorn $b = \begin{bmatrix} -0.5004 \\ -0.4978 \end{bmatrix}$. Lösningen $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6232 \\ 0.5645 \end{bmatrix}$.

(2p)

Uppgift 5. Antag att vi vill lösa randvärdesproblemet

$$u_{xx} + u_{yy} = x^2 + y$$

$(x, y) \in \Omega$ där Ω består av punkterna (x, y) med följande egenskaper. De ligger i kvadraten $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$ och utanför kvadraten $0 \le x \le 0.5$, $0 \le y \le 0.5$ På randen $\partial\Omega$ av den figuren uppfyller funktionen u randvillkorer $u(x, y) = 3$.

Inför ett nät med steg $\Delta x = 0.25$ och $\Delta y = 0.25$ och diskretisera problemet på lämpligt sett. Ange konkreta formler för den geometri och randvillkor.

Svar:

$$\begin{array}{rrrrrcl}
+4u_1 & -u_2 & & & & = & -0.0625(0.25^2 + 0.75) + 9 \\
-u_1 & +4u_2 & -u_3 & & & = & -0.0625(0.5^2 + 0.75) + 6 \\
& -u_2 & +4u_3 & -u_4 & & = & -0.0625(0.75^2 + 0.75) + 6 \\
& & -u_3 & +4u_4 & -u_5 & = & -0.0625(0.75^2 + 0.5) + 6 \\
& & & -u_4 & +4u_5 & = & -0.0625(0.75^2 + 0.25) + 9
\end{array}$$

(5p)