Chalmers **CTH HT-2000**
Matematik

Lösningar till tentamen den 00-10-19 i Numerisk Analys för M2, TMA095/TDA160

Uppgift 1.
$f(0.1) = 1.0513$; $f(0.2) = 1.1052$; $f(0.3) = 1.1618$; $f(0.4) = 1.2214$; $f(0.5) = 1.2840$;
$y'(h = 0.1) \approx (-f(0.3) + 4 * f(0.2) - 3 * f(0.1))/0.2 = 0.52550000$
$y'(h = 0.2) \approx (-f(0.5) + 4 * f(0.3) - 3 * f(0.1))/0.4 = 0.523250000$
$y'_{extrapol.} = y'(h = 0.1) + (y'(h = 0.1) - y'(h = 0.2))/3 = 0.526250000$

Uppgift 2.

$$A = \begin{bmatrix} 21 & 0.0037 \\ 340 & 1.8 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 0.0620 \\ 1.00 \end{bmatrix}$$

a)
$\|A\|_1 = 361$, $\|A\|_\infty = 341.8$, $A^{-1} \approx \begin{bmatrix} 0.049258 & -0.0001012 \\ -9.304362 & 0.574681 \end{bmatrix}$, $\|A^{-1}\|_1 \approx 9.3$, $\text{cond}(A) = 361 \cdot 9.3 = 3357$ för $\|...\|_1$ normen.
$\min\|Ax\|_1 = 1/\|A^{-1}\|_1$ för vektorer x sådana att $\|x\|_1 = 1$.
b) $Ax = b$.
$\frac{\|\delta x\|_1}{\|x\|_1} \leq cond(A)\left(\frac{\|\delta A\|_1}{\|A\|_1} + \frac{\|\delta b\|_1}{\|b\|_1}\right) \approx 3357(0.5/361 + 0.005/1) = 21.4$

Uppgift 3.
a) Beräkningen av funktionen $f(x) = 5x^3 + 2x^2 - 15x - 6 = 0$ i enstaka punkter i intervallet $[-1, 2]$ visar att det finns en rot till denna nåra $x = -0.5$ och en rot nära $x = 1.5$. $J(x) = df/dx = 3ax^2 + 2 * b * x - 15$. Newton-Raphsons metod består av successiva approximationer $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/J(x_n)$.
för $x_0 = -0.5$ fås approximatoner $x_1 = -0.39622641509434$, $x_2 = -0.39999603496032$; x_3 = -0.399999999.
för $x_0 = 1.5$ fås approximatoner $x_1 = 1.78787878787879$, $x_2 = 1.73426904383211$, $x_3 = 1.73205452636873$; $x_4 = 1.73205080757936$, $x_5 = 1.73205080756888$;
b) $df/da = x^3$, $df/db = x^2$, $e_a = 0.005$, $e_b = 0.005$.
Absoluta felet i x: $e_x = (e_a \cdot df/da + e_b \cdot df/db)/J$
För roten $x = 1.732051$:
$df/db = 3.0000000$, $df/da = 5.1961524$, $e_x = 0.0011$, $r_x = 0.0006407$.
För roten $x = -0.4$:
$df/db = 0.16000$, $df/da = -0.064000$, $e_x = -7.89e-05$, $r_x = 1.972e-04$.

Uppgift 4. $y' = F(t, y)$, $\quad y(0) = \begin{bmatrix} 0.31 \\ 0.97 \end{bmatrix}$, $y = y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$, $F(t, y) = \begin{bmatrix} t^2y_1 + y_2 \\ \sin(y_2) \end{bmatrix}$.

$$k_1 = k_1(t, y_1, y_2) = F(t, y) = \begin{bmatrix} t^2y_1 + y_2 \\ \sin(y_2) \end{bmatrix};$$

$$k_2 = k_2(t, y_1, y_2) = F(t + h, y + h \cdot k1) = \begin{bmatrix} (t + h)^2(y_1 + h(t^2y_1 + y_2)) + (y_2 + h\sin(y_2)) \\ \sin(y_2 + h\sin(y_2)) \end{bmatrix};$$

$$y(t + h) \approx y(t) + 0.5h(k1 + k2)$$

Delresultat:
$t = 0$, $h = 0.1$.

$$\begin{bmatrix} y & k1 & k2 \\ 0.3100 & 0.9700 & 1.0566 \\ 0.9700 & 0.8249 & 0.8687 \end{bmatrix}$$

$t = 0.1$,

$$\begin{bmatrix} y & k1 & k2 \\ 0.4113 & 1.0588 & 1.1623 \\ 1.0547 & 0.8697 & 0.9093 \end{bmatrix}$$

$t = 0.2$, $y = \begin{bmatrix} 0.5224 \\ 1.1436 \end{bmatrix}$

Uppgift 5. Betrakta följande randvärdesproblem

$$y'' + \exp(y') - 4y^3 = 0,\ x \in (0,1);\quad y(0) = 0.2;\ \ y(1) = 0.6;$$

a) Diskretisera problemet på ett lämpligt sätt. Ange det uppkomna icke-linjära ekvationssystemet. **(2p)**

b) Ange det uppkomna icke-linjära ekvationssystemet då randvillkoret $y(1) = 0.6$ ersättes med $y'(1) = 2$. **(1p)**

c) Skriv upp ekvationssystemet för steglängden $h = 1/3$ och formulera Newtons metod för detta system. Ange Jacobimatrisen som uppträder i detta fall.

(3p)

Lösningen

a) Inför nätet med steget $h = 1/(n+1)$: $x_0 = 0$, $x_1 = h$,..., $x_n = n \cdot h$

$$\begin{array}{llllllllll}
y_0 & - & 2y_1 & + & y_2 & + & \exp((y_2 - y_0)/(2h))h^2 & - & 4y_1^3\,h^2 & = & 0 \\
.... \\
y_{i-1} & - & 2y_i & + & y_{i+1} & + & \exp((y_{i+1} - y_{i-1})/(2h))h^2 & - & 4y_i^3\,h^2 & = & 0, & i = 2,...,n-1 \\
.... \\
y_{n-1} & - & 2y_n & + & y_{n+1} & + & \exp((y_{n+1} - y_{n-1})/(2h))h^2 & - & 4y_n^3\,h^2 & = & 0
\end{array}$$

där $y_0 = 0.2$, $y_{n+1} = 0.6$

b) Inför nätet med steget $h = 1/(n+1)$: $x_0 = 0$, $x_1 = h$,..., $x_n = n \cdot h$, $x_{n+1} = (n+1) \cdot h$.

$$\begin{array}{llllllllll}
y_0 & - & 2y_1 & + & y_2 & + & \exp((y_2 - y_0)/(2h))h^2 & - & 4y_1^3\,h^2 & = & 0 \\
.... \\
y_{i-1} & - & 2y_i & + & y_{i+1} & + & \exp((y_{i+1} - y_{i-1})/(2h))h^2 & - & 4y_i^3\,h^2 & = & 0, & i = 2,...,n \\
.... \\
(y_{n+1} & - & y_{n-1})/(2h) & = & 0.6,
\end{array}$$

där $y_0 = 0.2$.

c) Låt

$$F(y_1, y_2) = \begin{bmatrix} 0.2 & - & 2y_1 & + & y_2 & + & \exp((y_2 - 0.2)/(2/3))1/9 & - & 4/9\,y_1^3 \\ \\ y_1 & - & 2y_2 & + & 0.6 & + & \exp((0.6 - y_1)/(2/3))1/9 & - & 4/9\,y_2^3 \end{bmatrix}$$

Ekvationssystemet för y_1 , y_2 är $F(y_1, y_2) = 0$. Jacobimatrisen har elementena:

$J_{11} = -2 - 4/3\,y_1^2$,

$J_{12} = 1 + \exp((y_2 - 0.2)/(2/3))1/6$,

$J_{21} = 1 - \exp((0.6 - y_1)/(2/3))1/6$,

$J_{22} = -2 - 4/3\,y_2^2$.

Newton-Raphsons metod för att approximera y_1, y$_2$ är $\begin{bmatrix} y_1^{(k+1)} \\ y_2^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1^{(k)} \\ y_2^{(k)} \end{bmatrix} - J^{-1} F\left(y_1^{(k)}, y_2^{(k)}\right)$.