Chalmers **CTH HT-2000**
Matematik

Tentamen i Numerisk Analys för M2, TMA095/TDA160

Datum: 00-10-19 **Tid:** 14.15 - 18.15 **Sal : MN**

Betyggränser: 12, 16, 20 poäng. Tentan omfattar totalt 24 poäng.

Hjälpmedel: Valfri räknare, formelsamling och Beta. Anteckningar är **ej** tillåtna.

Resultat: Anslås 2000-11-01, Matematisk Centrum, Eklandagatan 86.

Telefon: 0740-45 90 22. Telefonvakt Henrik Olsson.

Uppgifterna står inte i svårighetsordning. Börja med den uppgift som verkar lättast!

Uppgift 1.
a) Approximera med hjälp av differenskvot derivatan $f'(0.1)$ av en funktion f given av sina värden i vissa punkter: $f(0.1) = 1.0513$, $f(0.2) = 1.1052$, $f(0.3) = 1.1618$, $f(0.4) = 1.2214$, $f(0.5) = 1.2840$. Uppskatta det relativa felet som framkommer om f:s värden är givna med 5 korrekta siffror. **(1p)**
b) Använd Richardsonsextrapolation för att få en bättre approximation av $f'(0.1)$. **(2p)**

Uppgift 2. Betrakta matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 21 & 0.0037 \\ 340 & 1.8 \end{bmatrix}$$

a) Beräkna någon norm av matrisen samt uppskatta motsvarande konditionstal av matrisen samt bestäm vilket minimalt värde $\|Ax\|$ kan anta om $\|x\| = 1$. **(3p)**

b) Uppskatta det relativa felet i lösningen till ekvationen

$$Ax = b; \qquad b = \begin{bmatrix} 0.0620 \\ 1.00 \end{bmatrix}$$

om elementen i matrisen A och högerledet b är givna med tre korrekta siffror. **(2p)**

Uppgift 3. Betrakta ekvationen

$$ax^3 + bx^2 - 15x - 6 = 0; \quad a = 5, \quad b = 2.$$

a) Bestäm två olika lösningar till denna ekvation i intervallet $[-1, 2]$. Använd Newton-Raphsons metod för att beräkna lösningarna med fyra korrekta decimaler. Bestäm själv lämpliga startapproximationer genom att beräkna värdena av funktionen i några punkter på intervallet. **(4p)**

b) Antag att koefficienterna a och b är givna bara med 3 korrekta siffror. Uppskatta absoluta och relativa felen i lösningarna, som framkommer på grund av detta **(2p)**

Uppgift 4. Betrakta följande begynnelsevärdesproblem för ett ODE system:

$$y' = F(t, y), \qquad y(0) = \begin{bmatrix} 0.31 \\ 0.97 \end{bmatrix},$$

där $y = y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$, $F(t, y) = \begin{bmatrix} t^2 y_1 + y_2 \\ \sin(y_2) \end{bmatrix}$.
Bestäm en approximation till $y(0.2)$ med hjälp av Heuns metod. Använd steglängden $h = 0.1$. Redovisa delresultat! **(4p)**

Vänd !

Uppgift 5. Betrakta följande randvärdesproblem

$$y'' + \exp(y') - 4y^3 = 0, \ x \in (0,1); \quad y(0) = 0.2; \ y(1) = 0.6;$$

a) Diskretisera problemet på ett lämpligt sätt. Ange det uppkomna icke-linjära ekvationssystemet. **(2p)**

b) Ange det uppkomna icke-linjära ekvationssystemet då randvillkoret $y(1) = 0.6$ ersättes med $y'(1) = 2$. **(1p)**

c) Skriv upp ekvationssystemet för steglängden $h = 1/3$ och formulera Newtons metod för detta system. Ange Jacobimatrisen som uppträder i detta fall. **(3p)**