Chalmers **CTH HT-99**
Datum: 2000-01-15

Lösning. Tentamen i Numerisk Analys för M2, TDA160

Uppgift 1. Betrakta systemet $\mathbf{F}(x,y)=0$ där

$$\mathbf{F}(x,y)=\begin{bmatrix}\alpha x^3+xy^3-1\\ xy^3-y-4.\end{bmatrix}$$

a) Systemet kan lösas med Newtons metod.

$$W^{(n+1)}=W^{(n)}-J^{-1}\left(W^{(n)}\right)F(W^{(n)})$$

där $W=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$ och Jacobimatrisen $J(x,y)$ har formen

$$J(x,y)=\begin{bmatrix}(6*x^2+y^3) & 3*x*y^3\\ y^3 & 3*x*y^2-1\end{bmatrix}$$

, b) Newtons metod med för $\alpha=2$ och startapproximationen $x=0$, $y=-3$ ger approximationer:
$W^0=\begin{bmatrix}0\\ -3\end{bmatrix}$, $J(W^0)=\begin{bmatrix}-27 & 0\\ -27 & -1\end{bmatrix}$; $F(W^0)=\begin{bmatrix}-1\\ -1\end{bmatrix}$, $d(W^0)=\begin{bmatrix}0.0370\\ 0\end{bmatrix}$,
$W^1=\begin{bmatrix}0.0370\\ -3.000\end{bmatrix}$.
Nästa steg ger samma värden $x=0.0370$, $y=-3.000$.

Uppgift 2. Betrakta följande begynnelsevärdesproblem.

$$y'=z-\cos(x),$$
$$z'=y+\sin(x),$$

$y(0)=0$, $z(0)=0$. Bestäm approximationer till $y(0.2)$, $z(0.2)$ med hjälp av Heuns metod.
Använd steglängden $h=0.1$. Redovisa delsresultat.
Allmänna formler: $W=\begin{bmatrix}y\\ z\end{bmatrix}$, $f=\begin{bmatrix}z-\cos(x)\\ y+\sin(x)\end{bmatrix}$, $k1=f$, $k_2=\begin{bmatrix}z+h*k1(2)-cos(x+h)\\ y+h*k1(1)+sin(x+h)\end{bmatrix}$,
$W(x+h)\approx W+h/2*(k1+k2)$
Första steg:
$W(0)=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$, $f=\begin{bmatrix}-1\\ 0\end{bmatrix}$, $k1=f$, $k_2=\begin{bmatrix}-0.9950\\ -0.0002\end{bmatrix}$, $W(0.1)\begin{bmatrix}-0.0998\\ -0.0000\end{bmatrix}$.
Andra steg:
$W(0.1)=\begin{bmatrix}-0.0998\\ 0\end{bmatrix}$, $f=\begin{bmatrix}-0.9950\\ 0.0001\end{bmatrix}$, $k1=f$, $k_2=\begin{bmatrix}-0.9801\\ -0.0006\end{bmatrix}$, $W(0.2)\begin{bmatrix}-0.1985\\ -0.0000\end{bmatrix}$.

Uppgift 3. Vi vill lösa randvärdesproblemet

$$y''+\sin(x)(y')^3=\log(1+x^2),\qquad x\in(0,1),\qquad y(0)=0;\;\; y(1)=1.$$

a) Låt $h=1/(n+1)$, $x_i=h\cdot i$, $i=0,...,n+1$.

$$\frac{y_{k+1}-2y_k+y_{k-1}}{h^2}+\sin(x_k)\left(\frac{y_{k+1}-y_{k-1}}{2h}\right)^3-\log(1+x_k^2)=0$$

för $k=1,...n$. För $k=1$, $y_{k-1}=y_0=0$. $k=n$, $y_{k+1}=y_{n+1}=1$.

b) Om vi väljer steglängden $h=1/3$ då finns det två inge punkter x_1 och x_2 i nätet och två motsvarande okända värden y_1, y_2. Systemet skrives på formen

$$F_1(y_1,y_2)=9(y_2-2y_1+0)+\sin(1/3)(3/2)^3\,(y_2)^3-\log(1+(1/3)^2)=0 \qquad (1)$$
$$F_2(y_1,y_2)=9(y_1-2y_2+1)+\sin(2/3)(3/2)^3\,(1-y_1)^3-\log(1+(2/3)^2)=0 \qquad (2)$$

2b) Ekvationen $F(y) = 0$, i där $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$, $F = \begin{bmatrix} F_1(y_1, y_2) \\ F_2(y_1, y_2) \end{bmatrix}$ kan lösas med Newtons metod.

$$y^{(n+1)} = y^{(n)} - J^{-1}\left(y^{(n)}\right) F(y^{(n)})$$

där Jacobimatrisen $J(y)$ har formen

$$J(y) = \begin{bmatrix} -18 & 9 + \sin(1/3) \cdot (81/8)\,(y_2)^2 \\ 9 - \sin(2/3) \cdot (81/8)\,(1 - y_1)^2 & -18 \end{bmatrix}$$

,

Uppgift 4. Betrakta Poisson ekvationen

$$u_{xx} + u_{yy} = x^2 + y^2$$

i kvadraten $x \in (0, 1)$, $y \in (0, 1)$ med randvillkoret $u(x, y) = x + y$ på randen av kvadraten.

a) Inför ett nät (x_i, y_i) med steglängden $h = 1/3$ i x och y led och låt $u_{i,j}$ beteckna en approximation till $u(x_i, y_i)$. På allmän form är systemet för $u_{i,j}$ i inre punkter följande

$$\left[\frac{u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j} + u_{i+1,j} + u_{i-1,j}}{h^2}\right] = x_i^2 + y_j^2, \qquad i, j = 1, ..., n$$

Där $u_{0,1} = h$, $u_{n+1,j} = (n + 1 + j)h$, $u_{i,n+1} = (i + n + 1)h$, $u_{i,0} = ih$. För $h = 1/3$ finns det bara fyra inre punkter i nätet och fyra motsvarande ekvationer.

$$\begin{aligned} 9(u_{2,1} - 4u_{1,1} + u_{1,2} + 1/3 + 1/3) &= (1/3)^2 + (1/3)^2 \\ 9(u_{1,1} - 4u_{2,1} + u_{2,2} + 2/3 + 4/3) &= (1/3)^2 + (2/3)^2 \\ 9(u_{1,1} - 4u_{1,2} + u_{2,2} + 4/3 + 2/3) &= (1/3)^2 + (2/3)^2 \\ 9(u_{1,2} - 4u_{2,2} + u_{2,1} + 5/3 + 5/3) &= (2/3)^2 + (2/3)^2 \end{aligned}$$

Uppgift 5.

Betrakta matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 0.001 & 0 & 4.5 \\ 5.1 & 100 & 1.2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

a) Uppskatta någon norm av matrisen A samt uppskatta konditionstalet av matrisen. **(3p)**
Konditionstalet definieras av $cond(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1000 & 0 & 2250 \\ -51 & 0 & -114.7 \\ 0 & 0 & -0.5 \end{bmatrix}$$

för $\|...\|_1$ normen $\|A\|_1 = 100$, $\|A\|_1^{-1} = 2365.2$, $cond(A) = 236520$;
för $\|...\|_\infty$ normen $\|A\|_\infty = 106.3$, $\|A\|_\infty^{-1} = 3250$, $cond(A) = 345475$.

b) Uppskatta med hjälp av konditionstalet normen av det relativa felet i lösningen till ekvationen $Ax = b$, om högerledet b är givet med ett fel $\quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \pm 0.01 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ **(2p)**

Det relativa felet uppskattas i $\|...\|_1$ normen med

$$\frac{\|\Delta x\|_1}{\|x\|_1} \approx cond(A)\frac{\|\Delta b\|_1}{\|b\|_1} = 236520 \cdot 0.01/2 = 118260$$