Chalmers **CTH HT-99**
Datum: 99-10-21

Lösning. Tentamen i Numerisk Analys för M2, TDA160

Uppgift 1. a) Ekvationen $F(x) = a \cdot x + \cos(x) + 1 = 0$ kan för $a > 1$ lösas med fixpunktsiterationen $x^{(n+1)} = -(1 + \cos(x))/a$. Med startapproximationen $x_0 = 1$ för $a = 3$ får man följande approximationer -0.51343410195605, -0.62368763811498, -0.60391009342887 -0.60770716883680, -0.60698645019501, -0.60712355268281, -0.60709748259373. Två sista skiljas inte i tredje decimalen så $x \approx -0.607$.

b) Antag att vi inte känner exakt koefficienten $a = 3$ vid x utan att $a = 3 \pm 0.01$. Absoluta felet dxi roten uppskattas av $dx = \left|\frac{F]_a}{F'_x}(x)\right| = \left|\frac{x}{3-sin(x)}\right| * 0.01 = 0.0017$. Relativa felet $\frac{dx}{|x|} = 0.0028$

Uppgift 2. Betrakta följande begynnelsevärdesproblem.

$$y' = \frac{2}{t}y + t, \qquad y(1) = 0$$

a) Bestäm approximationer av $y(1.2)$ med hjälp av Heuns metod. Använd steglängderna $h = 0.1$ och $h = 0.2$. Redovisa delsresultat. **(3p)** Beräkningarna görs enligt följande formler. $h = 0.2$, $t = 1$, $y = 0$;

$f = 2 * y/t + t = 1$, $k1 = f = 1$, $k2 = 2 * (y + h * k1)/(t + h) + (t + h) = 1.28181818181818$, $y = y + h/2 * (k1 + k2) = 0.11409090909091$;

$t = t{+}h = 1.10000000000000$, $f = 2{*}y/t{+}t = 1.30743801652893$, $k1 = f = 1.30743801652893$, $k2 = 2 * (y + h * k1)/(t + h) + (t + h) = 1.60805785123967$,

$y1(1.2) = y + h/2 * (k1 + k2) = 0.25986570247934$.

$h = 0.2$, $t = 1$, $f = 2 * y/t + t = 1$, $k1 = f = 1$, $k2 = 2 * (y + h * k1)/(t + h) + (t + h) = 1.53333333333333$,

$y2(1.2) = y + h/2 * (k1 + k2) = 0.25333333333333$.

b) Richardsonextrapolation för dessa två approximationer $y1$ och $y2$ ger en noggrannare approximation

$y(1.2) \approx y1 + \frac{(y1-y2)}{3} = 0.26204315886134$.

Uppgift 3. Vi vill lösa randvärdesproblemet

$$y'' + t^2\sin(y') = \cos(t^2), \qquad t \in (0,1), \qquad y(0) = 0; \;\; y(1) = 1.$$

1 a) Låt $h = 1/(n+1)$, $t_i = h \cdot i$, $i = 0, ..., n+1$.

$$\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k+1}}{h^2} + (t_k)^2 \sin\left(\frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h}\right) - \cos((t_k)^2)$$

för $k = 1, ...n$. För $k = 1$, $y_{k-1} = y_0 = 0$. $k = n$, $y_{k+1} = y_{n+1} = 1$.

1a')

I fallet med randvillkoret $y'(1) = 2$ är y_{n+1} en okänd variabel. Vi skriver en tillägande ekvation för y_{n+1} genom att uttrycker ranvillkoret med en ensidig finit differens. $\frac{3y_{n+1} - 4y_n + y_{n-1}}{2h} = 2$

1 b) Om vi väljer steglängden $h = 1/3$ då finns det två inge punkter y_1 och y_2 i nätet. Systemet skrives på formen

$$F_1(y_1, y_2) = 9(y_2 - 2y_1 + 0) + (1/3)^2 \sin\left(\frac{y_2 - 0}{2 \cdot 1/3}\right) - \cos((1/3)^2) = 0 \qquad (1)$$

$$F_2(y_1, y_2) = 9(y_1 - 2y_2 + 1) + (2/3)^2 \sin\left(\frac{1 - y_1}{2 \cdot 1/3}\right) - \cos((2/3)^2) = 0 \qquad (2)$$

2b) Ekvationen $F(y) = 0$, i där $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$, $F = \begin{bmatrix} F_1(y_1, y_2) \\ F_2(y_1, y_2) \end{bmatrix}$ kan lösas med Newtons metod.

$$y^{(n+1)} = y^{(n)} - J^{-1}\left(y^{(n)}\right) F(y^{(n)})$$

där Jacobimatrisen $J(y)$ har formen

$$J(y) = \begin{bmatrix} -18 & \left(9 + \frac{1}{6}\cos(\frac{3}{2}y_2)\right) \\ \left(9 - \frac{2}{3}\cos(\frac{3}{2}(1-y_1))\right) & -18 \end{bmatrix}$$

,

Uppgift 4. Betrakta värmeledningsekvationen

$$u_t = 3(u_{xx} + u_{yy})$$

i kvadraten $x \in (0,1)$, $y \in (0,1)$ med begynnelse villkoret $u(0,x,y) = x^2y^2$ och randvillkoret $u(t,x,y) = 0$ på randen av kvadraten.

a) Inför ett nät (x_i, y_i) med steglängden $h = 1/3$ i x och y led och låt $u_{i,j}(t)$ beteckna en approximation till $u(t, x_i, y_i)$. På allmän form är systemet av ODE för $u_{i,j}(t)$ i inre punkter följande

$$\frac{d}{dt}u_{i,j} = 3\left[\frac{u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j} + u_{i+1,j} + u_{i-1,j}}{h^2}\right], \qquad i,j = 1,...,n$$

Där $u_{0,j} = 0$, $u_{n+1,j} = 0$, $u_{i,n+1} = 0$, $u_{i,0} = 0$. För $h = 1/3$ finns det bara fyra inre punkter i nätet och fyra motsvarande ekvationer.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}u_{1,1} &= 27\left(u_{2,1} - 4u_{1,1} + u_{1,2}\right) \\
\frac{d}{dt}u_{2,1} &= 27\left(u_{1,1} - 4u_{2,1} + u_{2,2}\right) \\
\frac{d}{dt}u_{1,2} &= 27\left(u_{1,1} - 4u_{1,2} + u_{2,2}\right) \\
\frac{d}{dt}u_{2,2} &= 27\left(u_{1,2} - 4u_{2,2} + u_{2,1}\right)
\end{aligned}$$

b) För ett nät i t med steglängden Δt, $t_k = \Delta t k$ inför beteckningen $u^k_{i,j} = u(x_i, y_j, t_k)$. Bakåt Euler metoden för detta system är

$$\begin{aligned}
u^{k+1}_{1,1} &= u^k_{1,1} + \Delta t\ 27\left(u^{k+1}_{2,1} - 4u^{k+1}_{1,1} + u^{k+1}_{1,2}\right) \\
u^{k+1}_{2,1} &= u^k_{2,1} + \Delta t\ 27\left(u^{k+1}_{1,1} - 4u^{k+1}_{2,1} + u^{k+1}_{2,2}\right) \\
u^{k+1}_{1,2} &= u^k_{1,2} + \Delta t\ 27\left(u^{k+1}_{1,1} - 4u^{k+1}_{1,2} + u^{k+1}_{2,2}\right) \\
u^{k+1}_{2,2} &= u^k_{2,2} + \Delta t\ 27\left(u^{k+1}_{1,2} - 4u^{k+1}_{2,2} + u^{k+1}_{2,1}\right)
\end{aligned}$$

Uppgift 5. Betrakta matrisen $A = \begin{bmatrix} 100 & 8.123 & 23.5 \\ 0 & 0.002 & 1.22 \\ 0 & 0 & 4.21 \end{bmatrix}$

a) $\|A\|_2 = 100$, $cond(A) = 100/0.002 = 0.5 \cdot 10^5$.

b) Uppskatta det relativa felet i lösningen till ekvationen $Ax = b$ om högerledet b är givet med ett fel $\quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} 0.01 \\ 0.01 \\ 0.01 \end{bmatrix}$.

Det relativa felet är $\frac{\|\Delta x\|_2}{\|x\|_2} \approx cond(A)\frac{\|\Delta b\|_2}{\|b\|_2} = 0.5 \cdot 10^5 \frac{\sqrt{3 \cdot 10^{-4}}}{\sqrt{1+4+1}} = \frac{10^3}{2\sqrt{2}} = 353.55$