MATEMATIK Datum: 98-08-17

Lösningar till Tentamensskrivning i Numerisk Analys för M2 TDA160

Uppgift 1. Man vill beräkna $f(x,y) = ln(x+y) + xy$ för $x = 0.80 \pm 0.03$ och 1.48 ± 0.02. Absoluta felet ges av felförplantningsformel.

$$|e_f| \leq |f'_x(\tilde{x},\tilde{y})||e_x| + |f'_y(\tilde{x},\tilde{y})||e_y|$$

där $\tilde{x} = 0.8, |e_x| = 0.03$ $\tilde{y} = 1.48$ $, |e_y| = 0.02$.
$f'_x(\tilde{x},\tilde{y}) = \frac{1}{\tilde{x}+\tilde{y}} + \tilde{y}$ $f'_y(\tilde{x},\tilde{y}) = \frac{1}{\tilde{x}+\tilde{y}} + \tilde{x}$
Absoluta felet:
$|e_f| \leq 1.9185964 * 0.03 + 1.2385964 * 0.02 = 0.0823298$
Relativa felet:
$E_f = e_f/f(\tilde{x},\tilde{y}) = 0.0823298/2.00817544 = 0.04(0997)$

Uppgift 2.
$f(x) = \alpha^x - x^\alpha$; $f' = \log(\alpha)\alpha^x - \alpha x^{\alpha-1}$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\alpha^{x_n} - x_n^\alpha}{\log(\alpha)\alpha^{x_n} - \alpha x_n^{\alpha-1}}$$

$\alpha = 3$; $\alpha = 3 \pm 0.005$.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{3^{x_n} - x_n^3}{\log(3)3^{x_n} - 3x_n^2}$$

Lösningen vid $\alpha = \tilde{\alpha} = 3$ är $\tilde{x} = 2.478052$.

$$\delta x = \left| \frac{f'_\alpha(\tilde{x},\tilde{\alpha})}{f'_x(\tilde{x},\tilde{\alpha})} \delta\alpha \right| = 0.003636$$

Uppgift 3.
$\{x_i, T_i, w_i\}$, $i = 1...n$.
$w(x,T) = p(x) + q(x)T$.
$w_i(x_i, T_i = p(x_i) + q(x_i)T_i$; $p(x_i) = p_0 + p_1x_i + p_2x_i^2$; $p(x_i) = q_0 + q_1x_i + q_2x_i^2$.
Ekvationssystemet för p_0, p_1, p_2, q_0, q_1, q_2:

$$p_0 + p_1x_i + p_2x_i^2 + (q_0 + q_1x_i + q_2x_i^2)T_i = w_i$$

eller

$$1 \cdot p_0 + x_i \cdot p_1 + x_i^2 \cdot p_2 + T_i \cdot q_0 + T_ix_i \cdot q_1 + T_ix_i^2 \cdot q_2 = w_i$$

där $i = 1...n$

Uppgift 4.
$y'' + 2y' \sin t + y^2 = 0, \quad 0 \leq t \leq 1$.
$y(0) = 1$, $\quad y'(0) = 1$.
$x_1 = y$, $x_2 = y'$; $\quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$; $\quad x' = \begin{bmatrix} x_2 \\ -(2x_2 \sin t + x_1^2) \end{bmatrix}$
Euler bakåt metoden ipå allmänn form $x_{n+1} = x_n + hf(t_{n+1}, x_{n+1})$ för ekvationen $x' = f(t,x)$. där $h = t_{n+1} - t_n$.
I vårt konkreta fall

$$x_{n+1} = x_n + h \begin{bmatrix} x_{2,n+1} \\ -(2x_{2,n+1}\sin(t_{n+1}) + x_{1,n+1}^2) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_{1,n+1} - hx_{2,n+1} \\ -(x_{2,n+1}(1 + 2h\sin(t_{n+1})) + hx_{1,n+1}^2) \end{bmatrix} = x_n$$

$$J = \begin{bmatrix} 1 & -h \\ 2hx_{1,n+1} & (1 + 2h\sin(t_{n+1})) \end{bmatrix}$$

Start approximation kan vara x_n eller $x_n + hf(t_n, x_n)$ (bättre).

Uppgift 5.

$ru'' + u' = 0; \quad 1 \le r \le 2, \quad u(1) = u_{inne}, \quad u'(2) = -K(u - u_{omg}).$
$u_{inne} = 500, \quad u_{omg} = 20,\ K = 1.$
$r_i = 1 + hi, \quad i = 0, ..., n+1, \quad h = 1/(n+1), \quad u_i = u(r_i).$

$$\left(\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}\right) r_i + \left(\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}\right) = 0$$

för $i = 2...n$.

$$u'(2) \approx \frac{3u(2) - 4u(2-h) + u(2-2h)}{2h} = \frac{3u_{n+1} - 4u_n + u_{n-1}}{2h}$$

Randvillkoret i 2 ger ekvationen

$$\frac{3u_{n+1} - 4u_n + u_{n-1}}{2h} = -K(u_{n+1} - u_{omg})$$

Randvillkoret i 1 ger att ekvationen för u_1 innehåller det kända värdet $u(1) = u_{inne}$.

$$\left(\frac{u_2 - 2u_1 + u_{inne}}{h^2}\right)(1 + h) + \left(\frac{u_2 - u_{inne}}{2h}\right) = 0$$

där $(1 + h) = r_1$