Chalmers **CTH HT-99**
Matematik
A.H.

Tentamen i Numerisk Analys för M2, TDA160

Datum: 00-01-15 **Tid:** **Sal : MN**

Betyggränser: 12, 16, 20 poäng. Tentan omfattar totalt 25 poäng.

Hjälpmedel: Valfri räknare, formelsamling och Beta. Anteckningar är ej tillåtna.

Resultat: Anslags 2000-01-25, Matematisk Centrum, Eklandagatan 86.

Uppgifterna står inte enligt svårighetsordning. Börja med dem som verkar vara lättare!

Uppgift 1. Betrakta systemet $\mathbf{F}(x) = 0$ där

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{bmatrix} \alpha x^3 + xy^3 - 1 \\ xy^3 - y - 4. \end{bmatrix}$$

a) Ange Jacobi matrisen till $\mathbf{F}$ och formulera Newtons metod för att lösa systemet. **(2p)**

b) Bestäm med hjälp av Newtons metod en lösning till systemet med tre rätta decimaler för $\alpha = 2$ och startapproximationen $x = 0$, $y = -3$. **(3p)**

Uppgift 2. Betrakta följande begynnelsevärdesproblem.

$$y' = z - \cos(x),$$
$$z' = y + \sin(x),$$

$y(0) = 0$, $z(0) = 0$. Bestäm approximationer till $y(0.2)$, $z(0.2)$ med hjälp av Heuns metod.
Använd steglängden $h = 0.1$. Redovisa delsresultat. **(5p)**

Uppgift 3. Antag att vi vill lösa randvärdesproblemet på intervallet $(0, 1)$

$$y'' + \sin(x)(y')^3 = \log(1 + x^2), \quad x \in (0,1), \quad y(0) = 0; \;\; y(1) = 1.$$

a) Diskretisera problemet på lämpligt sätt. Ange det uppkomna ickelinjära ekvationssystemet. **(2p)**

b) Skriv upp detta diskreta ekvationssystem för steglängden $h = 1/3$ och formulera Newtons metod för detta system. Ange Jacobimatrisen som uppträder i detta fall. **(3p)**

Uppgift 4. Betrakta Poisson ekvationen

$$(u_{xx} + u_{yy}) = x^2 + y^2$$

i kvadraten $x \in (0,1)$, $y \in (0,1)$ med randvillkoret $u(x,y) = x + y$ på randen av kvadraten.

a) Inför ett nät (x_i, y_i) med steglängden $h = 1/3$ i x och y led och låt $u_{i,j}$ beteckna en approximation till $u(x_i, y_i)$. Ersätt $u_{xx} + u_{yy}$ med en centraldifferenskvot, skriv ett algebraiskt system för $u_{i,j}$. **(5p)**

Vänd !

Uppgift 5. Betrakta matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 0.001 & 0 & 4.5 \\ 5.1 & 100 & 1.2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

a) Uppskatta någon norm av matrisen A samt uppskatta konditionstalet av matrisen. **(3p)**

b) Uppskatta med hjälp av konditionstalet normen av det relativa felet i lösningen till ekvationen

$$Ax = b$$

om högerledet b är givet med ett fel

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \pm 0.01 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(2p)