Chalmers **CTH HT-99**
Matematik

Tentamen i Numerisk Analys för M2, TDA160

Datum: 99-10-21 **Tid:** **Sal : MN**

Betyggränser: 12, 16, 20 poäng. Tentan omfattar totalt 25 poäng.

Hjälpmedel: Valfri räknare, formelsamling och Beta. Anteckningar är ej tillåtna.

Resultat: Anslags 1999-10-03, Matematisk Centrum, Eklandagatan 86.

Uppgifterna står inte enligt svårighetsordning. Börja med dem som verkar vara lättare!

Uppgift 1. Ekvationen $a \cdot x + \cos(x) + 1 = 0$ har en rot för varje $a > 1$.

a) Formulera en fixpunktsiteration för att bestämma den roten. Använd startapproximationen $x_0 = 1$ för $a = 3$ och bestäm roten med 3 korrekta decimaler. **(2p)**

b) Antag att vi inte känner exakt koefficienten $a = 3$ vid x utan att $a = 3 \pm 0.01$. Uppskatta absoluta och relativa felen i roten. **(2p)**

Uppgift 2. Betrakta följande begynnelsevärdesproblem.

$$y' = \frac{2}{t}y + t, \qquad y(1) = 0$$

a) Bestäm approximationer av $y(1.2)$ med hjälp av Heuns metod. Använd steglängderna $h = 0.1$ och $h = 0.2$. Redovisa delsresultat. **(3p)**

b) Använd Richardsonextrapolation för att av dessa två approximationer bilda en noggrannare approximation för $y(1.2)$.

(2p)

Uppgift 3. Antag att vi vill lösa randvärdesproblemet

$$y'' + t^2 \sin(y') = \cos(t^2), \qquad t \in (0,1), \qquad y(0) = 0; \quad y(1) = 1.$$

a) Diskretisera problemet på lämpligt sätt. Ange det uppkomna ickelinjära ekvationssystemet.

(2p)

Extra poäng för att göra det samma i fallet med andra randvillkoret $y'(1) = 2$.

(1p)

b) Skriv upp detta ekvationssystem för steglängden $h = 1/3$ och formulera Newtons metod för detta system. Ange Jacobimatrisen som uppträder i detta fall. **(3p)**

Uppgift 4. Betrakta värmeledningsekvationen

$$u_t = 3(u_{xx} + u_{yy})$$

i kvadraten $x \in (0,1)$, $y \in (0,1)$ med begynnelse villkoret $u(0,x,y) = x^2y^2$ och randvillkoret $u(t,x,y) = 0$ på randen av kvadraten.

a) Inför ett nät (x_i, y_i) med steglängden $h = 1/3$ i x och y led och låt $u_{i,j}(t)$ beteckna en approximation till $u(t, x_i, y_i)$. Ersätt $u_{xx} + u_{yy}$ med en centraldifferenskvot, skriv ett system av ODE för $u_{i,j}(t)$ och ställ upp begynnelsevillkor för $u_{i,j}(0)$. **(3p)**

b) Skriv upp bakåt Euler metoden för att lösa detta begynnelsevärdesproblem för $u_{i,j}(t)$ med samma steglängderna.

(2p)

Vänd !

Uppgift 5. Betrakta matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 100 & 8.123 & 23.5 \\ 0 & 0.002 & 1.22 \\ 0 & 0 & 4.21 \end{bmatrix}$$

a) Beräkna någon norm av matrisen samt uppskatta konditionstalet av matrisen. **(3p)**

b) Uppskatta det relativa felet i lösningen till ekvationen

$$Ax = b$$

om högerledet b är givet med ett fel $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} 0.01 \\ 0.01 \\ 0.01 \end{bmatrix}$. **(2p)**