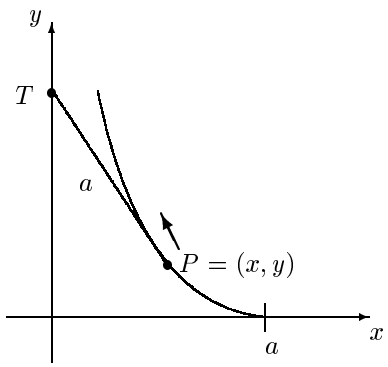
Konstruktionsövning 2. Minstakvadrat- o. egenvärdesproblem

Uppgift 1. Två punkter i xy-planet, P och T, är förbundna med ett snöre som har längden a. Antag att P befinner sig i $(a, 0)$ och T i origo. Om vi förflyttar T längs positiva y-axeln kommer P att följa en s.k. släpkurva eller traktrix (från latinets *tractum* - att släpa).



Denna släpkurva ges av

$$y(x) = a \ln\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x}\right) - \sqrt{a^2 - x^2}$$

Uppgiften består nu i att approximera denna släpkurva med ett polynom. Tag $a = 1$ och plocka ut tjugo punkter på släpkuvan vid $x = 1, 0.95, \cdots, 0.05$ och gör en minstakvadratanpassning av ett andragradspolynom. Öka därefter gradtalet successivt till fem. Rita släpkurvans tjugo punkter tillsammans med de fyra polynomkurvorna och beräkna residualerna och felkvadratsumman i samtliga fall.

Uppgift 2. Här följer en tabell över medeltemperaturen under 1931-1960 för årets tolv månader i Göteborg respektive Karesuando.

Mån	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Gbg	-1.8	-2.0	0.7	5.4	10.8	14.8	17.0	16.3	12.5	8.0	3.9	1.1
Kso	-14.0	-13.9	-9.9	-3.6	3.0	9.8	13.7	11.2	5.4	-1.6	-7.3	-11.2

Eftersom detta är ett periodiskt förlopp skall vi anpassa följande modell till mätdata,

$$y(t) = c_0 + c_1 \sin(\omega t) + c_2 \cos(\omega t).$$

Välj ett lämpligt värde på ω och bestäm c_0, c_1 och c_2 med minsta kvadratmetoden. Vad får koefficientmatrisen för intressant egenskap? Rita grafen av funktionen $y(t)$ och markera mätdata i samma bild så att man kan se om modellen ansluter väl till mätdata.

Hur mycket senare (ungefär) kommer våren i norr och hur mycket tidigare kommer hösten?

Uppgift 3. Utböjningen v hos en ledlagrad stav av längd L som belastas med lasten P beskrivs av följande egenvärdesproblem för en ordinär differentialekvation

$$\begin{cases} EI\, v'' + Pv = 0,\ 0 < x < L, \\ v(0) = v(L) = 0, \end{cases}$$

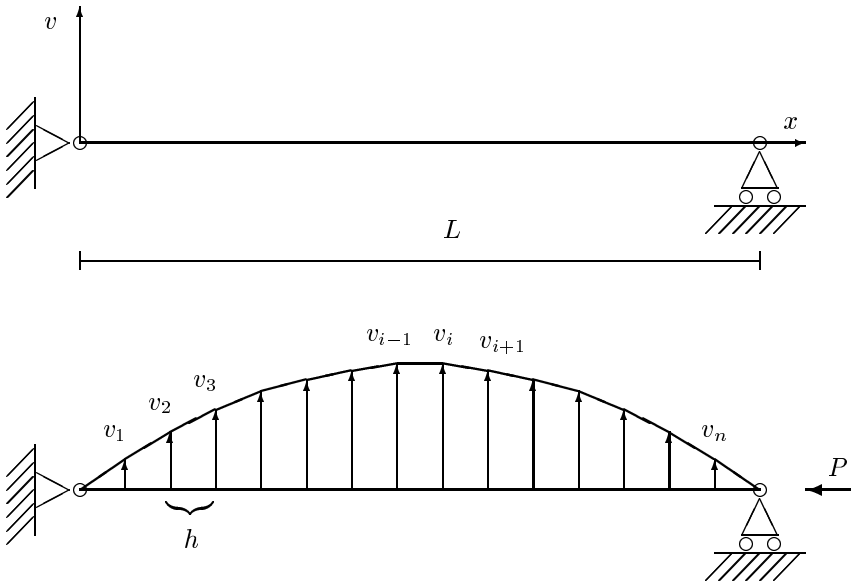
där EI är böjstyvheten.

Vi diskretisera problemet genom att införa en ekvidistant indelning av intervallet, $x_i = ih, i = 1, \cdots, n$ med $h = \frac{L}{n+1}$ och använda en centraldifferensapproximation av derivatan. Låter vi v_i beteckna approximationen av $v(x_i)$ får vi

$$\begin{cases} v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1} + h^2 \frac{P}{EI} v_i = 0 \quad i = 1, 2, \cdots, n \\ v_0 = v_{n+1} = 0 \end{cases}$$

Med matriser kan detta skrivas $Av = \lambda v$ där

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{n-1} \\ v_n \end{bmatrix} \quad \text{och } \lambda = h^2 \frac{P}{EI}$$



(a). Bestäm den lägsta kritiska lasten med inversiteration. Det räcker med $n = 20$ nodpunkter för att ge en hygglig approximation av egenfunktionen till det första egenvärdet. Använd skiftet $\mu = 0$, eftersom det är egenvärdet närmast noll vi vill bestämma.

Gör en tabell så att man ser att egenvärdesapproximationen konvergerar. Ange lägsta kritiska lasten och rita första bucklingsmoden.

(b). Använd nu *eigs* i MATLAB för att beräkna och rita upp de tre första bucklingsmoderna. Det räcker med $n = 30$ nodpunkter för att ge en hygglig approximation av egenfunktionerna till det första, andra respektive tredje egenvärdet.

Avslutningsvis kan vi nämna att i det här enkla fallet kan man lösa problemet analytiskt och får de kritiska lasterna

$$P_{cr} = \frac{n^2 \pi^2 EI}{L^2}, \; n = 1, 2, \cdots$$

Men den numeriska metoden duger även till problem som inte kan lösas analytiskt.