Chalmers Tekniska Högskola **CTH VT-98**
Matematik

Lösning. Tentamen 980116. Numerisk analys för M2

Uppgift 1(a). Vi har $V = \frac{h}{3}\left(B_1 + \sqrt{B_1 B_2} + B_2\right)$ med derivatorna $\frac{\partial V}{\partial h} = \frac{1}{3}\left(B_1 + \sqrt{B_1 B_2} + B_2\right)$, $\frac{\partial V}{\partial B_1} = \frac{h}{3}\left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{B_2}{B_1}}\right)$, $\frac{\partial V}{\partial B_2} = \frac{h}{3}\left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{B_1}{B_2}}\right)$ och vi får $|e_V| \lesssim |\frac{\partial V}{\partial h}||e_h| + |\frac{\partial V}{\partial B_1}||e_{B_1}| + |\frac{\partial V}{\partial B_2}||e_{B_2}|$

(b). Med $\tilde{h} = 6, \tilde{B}_1 = 8, \tilde{B}_2 = 3$ får vi $|e_V| \lesssim |\frac{\partial \tilde{V}}{\partial h}|E_h + |\frac{\partial \tilde{V}}{\partial B_1}|E_{B_1} + |\frac{\partial \tilde{V}}{\partial B_2}|E_{B_2}$, dvs. $|e_V| \lesssim \frac{16}{3}E_h + (2 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{8}})E_{B_1} + (2 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{8}{3}})E_{B_2}$
Eftersom $\frac{16}{3}E_h$ lämnar störst bidrag till e_V bör h mätas noggrannare.

Uppgift 2(a). Vi har ekvationen $f(x) = 0$ med $f(x) = \exp(-ax^2) - \ln(x+b)$ och $f'(x) = -2ax\exp(-ax^2) - \frac{1}{x+b}$. En grov skiss ger att $x^{(0)} = 0.75$ bör vara en bra startapproximation.

Newtons metod $x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}, k = 0, 1, \cdots$, ger $x^{(1)} = 0.7402\cdots$, $x^{(2)} = 0.740352611\cdots$, $x^{(3)} = 0.7403526168673\cdots$, osv. Vi tar $\tilde{x} = 0.7404$ som approximation av x^*. Feluppskattning: $|\tilde{x} - x^*| \lesssim \frac{f(\tilde{x})}{f'(\tilde{x})} \leq \frac{8.13\cdot 10^{-5}}{1.71} < \frac{1}{2}\cdot 10^{-4}$.

(b). Vi har $f(x,a,b) = \exp(-ax^2) - \ln(x+b)$ med $f'_x = -2ax\exp(-ax^2) - \frac{1}{x+b}$, $f'_a = -x^2\exp(-ax^2)$ och $f'_b = -\frac{1}{x+b}$.
Vi får $|\delta x| \lesssim \frac{|f'_a|}{|f'_x|}|\delta a| + \frac{|f'_b|}{|f'_x|}|\delta b|$ och med aktuella siffror ger detta $|\delta x| \lesssim 0.08|\delta a| + 0.46|\delta b| \leq 10^{-3}$. Alltså bör vi trots allt bara svara med $x^* = 0.7404 \pm 0.001$.

Uppgift 3. Om vi låter $z = x'$ så får vi

$$\begin{cases} x' = z \\ z' = -x^3 - 0.05z \\ x(0) = 1 \\ z(0) = 0 \end{cases}$$

eller

$$\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(0) = c \end{cases}, \; y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}, \; c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \; f(t,y) = \begin{bmatrix} y_2 \\ -y_1^3 - 0.05y_2 \end{bmatrix}$$

Heuns metod $y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}\{k_1 + k_2\}, k_1 = h\,f(t_n, y_n), k_2 = h\,f(t_{n+1}, y_n + k_1)$, ger för $h = 0.2$ följande

t	$y(t;h)$	k_1	k_2
0	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ -0.2000 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.0400 \\ -0.1980 \end{bmatrix}$
0.2	$\begin{bmatrix} 0.9800 \\ -0.1990 \end{bmatrix}$		

och för $h = 0.1$ får vi

t	$y(t;h)$	k_1	k_2
0	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ -0.1000 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.0100 \\ -0.0955 \end{bmatrix}$
0.1	$\begin{bmatrix} 0.9950 \\ -0.0998 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.0100 \\ -0.0980 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.0198 \\ -0.0946 \end{bmatrix}$
0.2	$\begin{bmatrix} 0.9801 \\ -0.1960 \end{bmatrix}$		

Med steget $h = 0.2$ får vi $x(0.2) = 0.9800$ och med $h = 0.1$ får vi $x(0.2) = 0.9801$.

Uppgift 4(a). Vi inför nätet $x_i = i\,h,\ i = 0, \cdots, n+1$, med $h = \frac{1}{n+1}$, så att $x_0 = 0$ och $x_{n+1} = 1$. Låt y_i beteckna approximationer av $y(x_i)$.

Vi använder centraldifferensapproximationer av både första och andra derivatorna och får

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} - \sqrt{1 + \left(\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}\right)^2} = 0,\ i = 1, \cdots, n$$

Randvillkoret ger direkt $y_0 = 0.3$ och $y_{n+1} = 0$.

(b). Vi har $h = \frac{1}{3}$ och därmed $n = 2$. Ekvationssystemet blir

$$\begin{cases} y_2 - 2y_1 + 0.3 - h^2\sqrt{1 + \left(\frac{y_2 - 0.3}{2h}\right)^2} = 0 \\ -2y_2 + y_1 - h^2\sqrt{1 + \left(\frac{-y_1}{2h}\right)^2} = 0 \end{cases}$$

(c). Newtoniterationen blir $Y^{(k+1)} = Y^{(k)} - J(Y^{(k)})^{-1}F(Y^{(k)})$ om vi skriver systemet som $F(Y) = 0$ med derivatamatrisen $J(Y) = \frac{\partial F}{\partial Y}(Y)$, där

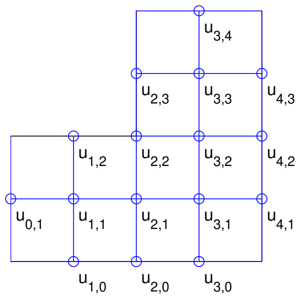
$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix},\quad F(Y) = \begin{bmatrix} y_2 - 2y_1 + 0.3 - h^2\sqrt{1 + \left(\frac{y_2 - 0.3}{2h}\right)^2} \\ -2y_2 + y_1 - h^2\sqrt{1 + \left(\frac{-y_1}{2h}\right)^2} \end{bmatrix}$$

och

$$J(Y) = \begin{bmatrix} -2 & 1 - \frac{1}{4}(y_2 - 0.3)/\sqrt{1 + \left(\frac{y_2 - 0.3}{2h}\right)^2} \\ 1 + \frac{1}{4}y_1/\sqrt{1 + \left(\frac{-y_1}{2h}\right)^2} & -2 \end{bmatrix}$$

Uppgift 5. Vi har ekvationen $-(u_{xx} + u_{yy}) = f(x,y),\ (x,y) \in L$ med $u = g(x,y),\ (x,y) \in \partial L$.

Ekvidistant nät, $x_i = ih, i = 0, \cdots, n+1$, $y_j = jh, j = 0, \cdots, n+1$ med $h = \frac{1}{n+1}$ som täcker L och så att noder beskriver områdets rand. Vi får med $n = 3$ (dvs. $h = \frac{1}{4}$)



Låt $u_{i,j}$ beteckna en approximation av $u(x_i, y_j)$ och ersätt $u_{xx} + u_{yy}$ i punkten (x_i, y_j) med differenskvoten

$$\frac{u_{i+1,j} + u_{i,j+1} - 4u_{i,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j-1}}{h^2}$$

Låt vidare $f_{i,j} = f(x_i, y_j)$ och $g_{i,j} = g(x_i, y_j)$. Vi får

$$\begin{cases} -u_{2,1} - u_{1,2} + 4u_{1,1} - u_{0,1} - u_{1,0} = h^2 f_{1,1} \\ -u_{3,1} - u_{2,2} + 4u_{2,1} - u_{1,1} - u_{2,0} = h^2 f_{2,1} \\ -u_{4,1} - u_{3,2} + 4u_{3,1} - u_{2,1} - u_{3,0} = h^2 f_{3,1} \\ -u_{4,2} - u_{3,3} + 4u_{3,2} - u_{2,2} - u_{3,1} = h^2 f_{3,2} \\ -u_{4,3} - u_{3,4} + 4u_{3,3} - u_{2,3} - u_{3,2} = h^2 f_{3,3} \end{cases}$$

Överflyttning av kända värden till höger ger

$$\begin{cases} -u_{2,1} + 4u_{1,1} &= h^2 f_{1,1} + u_{1,2} + u_{0,1} + u_{1,0} \\ -u_{3,1} + 4u_{2,1} - u_{1,1} &= h^2 f_{2,1} + u_{2,2} + u_{2,0} \\ -u_{3,2} + 4u_{3,1} - u_{2,1} &= h^2 f_{3,1} + u_{4,1} + u_{3,0} \\ -u_{3,3} + 4u_{3,2} - u_{3,1} &= h^2 f_{3,2} + u_{4,2} + u_{2,2} \\ 4u_{3,3} - u_{3,2} &= h^2 f_{3,3} + u_{4,3} + u_{3,4} + u_{2,3} \end{cases}$$

Med matrisbeteckningar kan detta skrivas

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \\ u_{3,1} \\ u_{3,2} \\ u_{3,3} \end{bmatrix} = h^2 \begin{bmatrix} f_{1,1} \\ f_{2,1} \\ f_{3,1} \\ f_{3,2} \\ f_{3,3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_{1,2} + g_{0,1} + g_{1,0} \\ g_{2,2} + g_{2,0} \\ g_{4,1} + g_{3,0} \\ g_{4,2} + g_{2,2} \\ g_{4,3} + g_{3,4} + g_{2,3} \end{bmatrix}$$

Detta förenklas något då vi sätter in att $f(x, y) = 2$ överallt och att $g(x, y) = 0$ på randen.