Chalmers Tekniska Högskola **CTH HT-97**
Matematik

Lösning. Övningstenta 1. Numerisk analys för M2, TDA160

Uppgift 1. Vänster term i parantesen (flytta om för att förenkla och finna x)

$$\frac{2}{1-\frac{a^2}{b^2}} = \frac{2(\frac{b}{a})^2}{(\frac{b}{a})^2-1} = \frac{2(1+x)^2}{(1+x)^2-1} = \frac{1+2x+x^2}{x+\frac{1}{2}x^2} \tag{1}$$

Höger term i parantesen (flytta om för att få enklare, Taylorutveckla)

$$\frac{1+2\ln(\frac{b}{a})}{\ln(\frac{b}{a})} = 2+\frac{1}{\ln(\frac{b}{a})} = 2+\frac{1}{\ln(1+x)} = 2+\frac{1}{x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots} \tag{2}$$

Hela parantesen (gör liknämnig, förenkla och stryk högre ordnings termer)

$$(1)-(2) = \frac{(1+2x+x^2)(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots)-(x+\frac{1}{2}x^2)}{(x+\frac{1}{2}x^2)(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots)} - 2 =$$

$$= \frac{(x+\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots)-(x+\frac{1}{2}x^2)}{x^2+\cdots} - 2 =$$

$$= \frac{x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots}{x^2+\cdots} - 2 \approx 1+\frac{1}{3}x-2 = \frac{h}{3a}-1$$

Uppgift 2(a). Vi har funktionen F och Jacobianen J enligt

$$F(x) = \begin{bmatrix} x_1^2+x_2^2-1 \\ x_1x_2-0.1 \end{bmatrix}, \quad J(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ x_2 & x_1 \end{bmatrix}$$

Newtons metod; $x^{(k+1)} = x^{(k)} + d^{(k)}$, $k = 0, 1, \cdots$, där $d^{(k)}$ lösningen till $J(x^{(k)})d^{(k)} = -F(x^{(k)})$.

(b). Så här blir det

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad F(x^{(0)}) = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.1 \end{bmatrix}, \quad J(x^{(0)}) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$d^{(0)} = -J(x^{(0)})^{-1}F(x^{(0)}) = -\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix}$$

$$x^{(1)} = x^{(0)} + d^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.1 \end{bmatrix}$$

Uppgift 3(a). Om vi låter $v = x'$ så får vi

$$\begin{cases} x' = v \\ v' = 2\frac{k}{m}(-x+\frac{Lx}{\sqrt{L^2+x^2}}) \\ x(0) = x_0 \\ v(0) = 0 \end{cases}$$

eller

$$\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(0) = c \end{cases}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} x_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

med

$$f(t,y) = \begin{bmatrix} y_2 \\ 2\frac{k}{m}(-y_1 + \frac{Ly_1}{\sqrt{L^2+y_1^2}}) \end{bmatrix}$$

(b). Heuns metod ger för $h = 0.5$ följande

t	$y(t;h)$	k_1	k_2
0	$\begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ -0.11715729 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.05857864 \\ -0.11715729 \end{bmatrix}$
0.5	$\begin{bmatrix} 0.08535534 \\ -0.05857864 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.05857864 \\ -0.08173491 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.09944610 \\ -0.02864740 \end{bmatrix}$
1	$\begin{bmatrix} 0.04584915 \\ -0.08617422 \end{bmatrix}$		

och för $h = 0.25$ får vi

t	$y(t;h)$	k_1	k_2
0	$\begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ -0.11715729 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.02928932 \\ -0.11715729 \end{bmatrix}$
0.25	$\begin{bmatrix} 0.09633883 \\ -0.02928932 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.02928932 \\ -0.10783509 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.05624809 \\ -0.09010756 \end{bmatrix}$
0.5	$\begin{bmatrix} 0.08564666 \\ -0.05403215 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.05403215 \\ -0.08238854 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.07462929 \\ -0.05453653 \end{bmatrix}$
0.75	$\begin{bmatrix} 0.06956398 \\ -0.07114779 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.07114779 \\ -0.04983286 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.08360600 \\ -0.02319075 \end{bmatrix}$
1	$\begin{bmatrix} 0.05021975 \\ -0.08027574 \end{bmatrix}$		

Uppgift 4(a). Vi inför nätet $x_i = ih$, $i = 0, 1, \cdots, n+1$ med $h = \frac{1}{n+1}$ och låter y_i beteckna en approximation av $y(x_i)$. Om vi ersätter $y''(x_i)$ med centraldifferenskvoten $D_+D_-y(x_i)$ så får vi ekvationerna

$$\begin{cases} -y_{i+1} + 2y_i - y_{i-1} + h^2\cos^2(y_i) = h^2 4x_i, \; i = 1, \cdots, n \\ y_0 = 0.5, \;\; y_{n+1} = 0 \end{cases}$$

Med vektorbeteckningar blir detta ett ickelinjärt ekvationssystem

$$F(y) \equiv Ay + f(y) = 0$$

där

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix}, \quad f(y) = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n-1} \\ f_n \end{bmatrix}$$

med

$$\begin{aligned} f_1(y) &= h^2\cos^2(y_1) - h^2 4x_1 - 0.5 \\ f_i(y) &= h^2\cos^2(y_i) - h^2 4x_i,\ i = 2,\cdots,n \end{aligned}$$

(b). För $h = 0.5$ får vi ($n = 1$ så $x_0 = 0, x_1 = 0.5, x_2 = 1$)

$$\begin{cases} -y_2 + 2y_1 - y_0 + h^2\cos^2(y_1) = h^2 4x_1 \\ y_0 = 0.5,\quad y_2 = 0 \end{cases}$$

dvs. $8y_1 + \cos^2(y_1) - 4 = 0$.

(c). Låt $g(z) = 8z + \cos^2(z) - 4$ ($g'(z) = 8 - 2\cos(z)\sin(z)$). En skiss visar att roten till $g(z) = 0$ ligger nära $z^{(0)} = 0.4$ som vi tar som startapproximation.

Newtons metod: $z^{(1)} = 0.38337677\cdots$, $z^{(2)} = 0.38414036\cdots$, $z^{(3)} = 0.38410698\cdots$
Vi tar $\tilde{z} = 0.3841$ som approximation av z^* med $|\tilde{z} - z^*| \lesssim \frac{|g(\tilde{z})|}{|g'(\tilde{z})|} < 8.8 \cdot 10^{-6}$.

Uppgift 5. Låt $x_i = ih,\ i = 0,\cdots,n+1,\ y_j = jh, j = 0,\cdots,n+1$, med $h = \frac{L}{n+1}$, samt låt $u_{i,j}$ och $w_{i,j}$ beteckna approximationer av $u(x_i, y_j)$ resp. $w(x_i, y_j)$.

Ersätt u_{xx} och u_{yy} i ekvationen $u_{xx} + u_{yy} = \frac{q}{D}$ med centraldifferenskvoter:

$$\frac{u_{i+1,j} + u_{i,j+1} - 4u_{i,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j-1}}{h^2} = \frac{q_{i,j}}{D}, \quad \begin{matrix} i = 1,\cdots,n \\ j = 1,\cdots,n \end{matrix} \tag{1}$$

Från randvillkoren får vi

$$\begin{aligned} u_{i,0} = u_{i,n+1} = 0, &\quad i = 1,\cdots,n \\ u_{0,j} = u_{n+1,j} = 0, &\quad j = 1,\cdots,n \end{aligned} \tag{2}$$

Samla de obekanta $u_{i,j},\ i = 1,\cdots,n,\ j = 1,\cdots,n$, med en horisontell uppräkning i vektorn U så att $U_{i+(j-1)n} = u_{i,j}$.

Inför vi också en vektor E med $E_{i+(j-1)n} = h^2\frac{q_{i,j}}{D}$ så kan ekvationerna (1) och (2) skrivas $AU = E$ med

$$A = \begin{bmatrix} B & I & & & \\ I & B & I & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & I & B & I \\ & & & I & B \end{bmatrix}$$

där B är en tridiagonal $n \times n$ matris med -4:or på huvuddiagonalen och 1:or på under- och överdiagonalerna och I är $n \times n$ enhetsmatrisen.

Ersätt w_{xx} och w_{yy} i ekvationen $w_{xx} + w_{yy} = u$ med centraldifferenskvoter:

$$\frac{w_{i+1,j} + w_{i,j+1} - 4w_{i,j} + w_{i-1,j} + w_{i,j-1}}{h^2} = u_{i,j}, \quad \begin{array}{l} i = 1, \cdots, n \\ j = 1, \cdots, n \end{array} \tag{3}$$

Randvillkoren ger

$$\begin{array}{l} w_{i,0} = w_{i,n+1} = 0, \quad i = 1, \cdots, n \\ w_{0,j} = w_{n+1,j} = 0, \quad j = 1, \cdots, n \end{array} \tag{4}$$

Samla de obekanta $w_{i,j}$, $i = 1, \cdots, n$, $j = 1, \cdots, n$, med en horisontell uppräkning i vektorn W så att $W_{i+(j-1)n} = w_{i,j}$.

Inför vektorn F med $F_{i+(j-1)n} = h^2 u_{i,j}$, dvs. $F = h^2 U$, så kan ekvationerna (3) och (4) skrivas $AW = F$ eller $AW = h^2 U$ med A som ovan.

Det ursprungliga PDEsystemet kommer att approximeras av

$$\left\{ \begin{array}{l} AU = E \\ AW = h^2 U \end{array} \right.$$

För effektiv beräkning faktoriserar vi A som en gles matris och får U som lösning till $AU = E$ därefter löser vi $AW = h^2 U$, med samma faktorer, för att få W.