Chalmers Tekniska Högskola **CTH HT-97**
Matematik

Lösning. Övningstenta 2. Numerisk analys för M2, TDA160

Uppgift 1(a). $f(\phi) = \phi - 0.4\sin(\phi) - 0.5 = 0 \quad (f'(\phi) = 1 - 0.4\cos(\phi))$
Startapproximation: $\sin(\phi) \approx \phi$ för små ϕ ger $\phi^{(0)} = 5/6$.
Newtons metod $\phi^{(k+1)} = \phi^{(k)} - \frac{f(\phi^{(k)})}{f'(\phi^{(k)})}, k = 0, 1, \cdots$, ger $\phi^{(1)} = 0.782\cdots$, $\phi^{(2)} = 0.7818324\cdots$, $\phi^{(3)} = 0.7818323\cdots$. Tag $\tilde{\phi} = 0.7818$ som approx. av ϕ^*.
Feluppskattning: $|\tilde{\phi} - \phi^*| \lesssim \frac{f(\tilde{\phi})}{f'(\tilde{\phi})} \leq \frac{2.32\cdot 10^{-5}}{0.716} \leq 3.3 \cdot 10^{-5} < \frac{1}{2} \cdot 10^{-4}$.

(b). $f(\phi, e, a) = \phi - e\sin(\phi) - a = 0 \quad (f'_\phi = 1 - e\cos(\phi), f'_e = -\sin(\phi), f'_a = -1)$
Taylorutveckling ger $\delta\phi \approx \frac{f'_e}{f'_\phi}\delta e + \frac{f'_a}{f'_\phi}\delta a = \frac{-\sin(\tilde{\phi})}{1 - \tilde{e}\cos(\tilde{\phi})}\delta e + \frac{-1}{1 - \tilde{e}\cos(\tilde{\phi})}\delta a$ och med aktuella siffror får vi $|\delta\phi| \lesssim 0.99|\delta e| + 1.40|\delta a| \leq 0.1195$

Uppgift 2. Insättning av mätdata i modellen $C_p(T) = a + b\,T + c\,T^{-2}$ ger

$$\left\{ \begin{array}{r} a + 300\,b + 300^{-2}c = 40.82 \\ a + 400\,b + 400^{-2}c = 48.10 \\ a + 500\,b + 500^{-2}c = 55.09 \\ a + 600\,b + 600^{-2}c = 61.25 \\ a + 700\,b + 700^{-2}c = 66.60 \\ a + 800\,b + 800^{-2}c = 71.26 \\ a + 900\,b + 900^{-2}c = 75.33 \\ a + 1000\,b + 1000^{-2}c = 78.90 \end{array} \right.$$

Nåja, en gång skall man väl ge lätta poäng. (Nu har vi gjort det!)

Uppgift 3. Taylorutveckling ger

$$u(x+h, y+k) = u + hu_x + ku_y + \frac{h^2}{2}u_{xx} + hku_{xy} + \frac{k^2}{2}u_{yy} +$$
$$+ \frac{h^3}{6}u_{xxx} + \frac{h^2k}{2}u_{xxy} + \frac{hk^2}{2}u_{xyy} + \frac{k^3}{6}u_{yyy} + \cdots$$

där vi i högerledet skrivit u istället för $u(x, y)$, u_x istället för $u_x(x, y)$, etc.

Nu gör vi en tabell över tecknen framför derivatorna för olika teckenkombinationer på h och k (beloppen av koefficienterna framför derivatorna är samma hela tiden)

h	k	u	u_x	u_y	u_{xx}	u_{xy}	u_{yy}	u_{xxx}	u_{xxy}	u_{xyy}	u_{yyy}
+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
+	−	+	+	−	+	−	+	+	−	+	−
−	+	+	−	+	+	−	+	−	+	−	+
−	−	+	−	−	+	+	+	−	−	−	−

Nu vill vi kombinera

$$u(x+h, y+k),\; u(x+h, y-k),\; u(x-h, y+k),\; u(x-h, y-k)$$

så att inte önskvärda termer försvinner, dvs. så att

$$u_x,\ u_y,\ u_{xx},\ u_{yy},\ u_{xxx},\ u_{xxy},\ u_{xyy},\ u_{yyy}$$

försvinner. I tabellen ser vi att detta kan uppnås om vi tar kombinationen

$$+,\ -,\ -,\ +$$

Vi får således

$$u(x+h,y+k)-u(x+h,y-k)-u(x-h,y+k)+u(x-h,y-k)=$$

$$=4hku_{xy}(x,y)+\mathcal{O}(h^4)+\mathcal{O}(k^4)$$

Tar vi nu $h=k$ och dividerar med $4h^2$ får vi den sökta differenskvoten

$$\frac{u(x+h,y+k)-u(x+h,y-k)-u(x-h,y+k)+u(x-h,y-k)}{4h^2}$$

som ger oss $u_{xy}(x,y)$ med $\mathcal{O}(h^2)$-noggrannhet.

Uppgift 4(a). Inför nätet $x_i=ih,\ i=0,1,\cdots,n+1$ med $h=\frac{1}{n+1}$ och låt y_i beteckna en approximation av $y(x_i)$. Ersätt $y''(x_i)$ i differentialekvationen med centraldifferenskvoten $\frac{y(x_{i+1})-2y(x_i)+y(x_{i-1})}{h^2}$ och $y'(x_0)$ i randvillkoret med den ensidiga differenskvoten $\frac{-y(x_2)+4y(x_1)-3y(x_0)}{2h}$. Detta ger ekvationerna

$$\begin{cases} (1+x_i^2)\,\frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2}-y_i=1,\ i=1,\cdots,n \\ y_0+\gamma\frac{-y_2+4y_1-3y_0}{2h}=0,\ \ y_{n+1}=0 \end{cases}$$

På matrisform blir detta linjära ekvationssystem

$$\begin{bmatrix} a_1 & 1 & & & & 1 \\ 1 & a_2 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & 1 & a_{n-1} & 1 & \\ & & & 1 & a_n & \\ c_1 & c_2 & & & & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_{n-1} \\ e_n \\ 0 \end{bmatrix}$$

där $a_i=-2-(1+x_i^2)^{-1}h^2,\ c_1=\gamma\frac{2}{h},\ c_2=-\gamma\frac{1}{2h},\ d=1-\gamma\frac{3}{2h}$ och $e_i=(1+x_i^2)^{-1}h^2$.

(b). Ekvationssystemet har blockstrukturen $\begin{bmatrix} A & b \\ c^T & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$, där A är en tridiagonal matris.

(c). För $\gamma=1$ och $h=0.5$ får vi ($n=1$ så $x_0=0,x_1=0.5,x_2=1$)

$$\begin{cases} (1+x_1^2)\,\frac{y_2-2y_1+y_0}{h^2}-y_1=1 \\ y_0+\gamma\frac{-y_2+4y_1-3y_0}{2h}=0,\ y_2=0 \end{cases} \quad \text{eller} \quad \begin{cases} (1+0.25)\,\frac{-2y_1+y_0}{0.25}-y_1=1 \\ y_0+4y_1-3y_0=0 \end{cases}$$

dvs. $y_0=2$, $y_1=1$ och $y_2=0$.

Uppgift 5. Vi inför nätet $x_i=ih, i=0,1,\cdots,n+1$, med $h=\frac{1}{n+1}$ och $t_j=jk, j=0,1,2,\cdots$ samt låter $u_{i,j}$ beteckna en approximation av $u(x_i,t_j)$.

Vi ersätter u_t med en framåtdifferens $u_t(x_i, t_j) = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} + \mathcal{O}(k)$ och u_{xx} med en centraldifferens $u_{xx}(x_i, t_j) = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + \mathcal{O}(h^2)$ och får

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} = c(u_{i,j}) \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} \tag{1}$$

i det inre av nätet, dvs. $i = 1, \cdots, n$, $j = 1, 2, \cdots$. Med $\lambda = \frac{k}{h^2}$ kan (1) skrivas

$$u_{i,j+1} = \lambda c(u_{i,j}) u_{i+1,j} + (1 - 2\lambda c(u_{i,j})) u_{i,j} + \lambda c(u_{i,j}) u_{i-1,j}$$

Begynnelse- och randvillkoren ger direkt

$$u_{i,0} = g(x_i),\ i = 0, 1, \cdots, n+1$$

$$u_{0,j} = f_1(t_j),\ u_{n+1,j} = f_2(t_j),\ j = 1, 2, \cdots$$

Differensekvationen blir således för tidsnivån $t = t_0$ (beg.värden)

$$u_{i,0} = g(x_i),\ i = 0, 1, \cdots, n+1$$

och för tidsnivåerna $t = t_j,\ j = 1, 2, \cdots$ (diff.ekv. och randvärden)

$$\begin{cases} u_{0,j} = f_1(t_j) \\ u_{i,j+1} = \lambda c(u_{i,j}) u_{i+1,j} + (1 - 2\lambda c(u_{i,j})) u_{i,j} + \lambda c(u_{i,j}) u_{i-1,j},\ i = 1, \cdots, n \\ u_{n+1,j} = f_2(t_j) \end{cases}$$