Chalmers Tekniska Högskola **CTH HT-97**
Matematik

Tentamen i Numerisk analys för M2, TDA160/TIN080

Datum: 1998-01-16 **Tid:** 14.15-18.15 **Sal:** MN

Förfrågningar: Ingvar Mellander, tel. 772 1081

Betygsgränser: 10, 15 resp. 20 poäng. Tentan omfattar totalt 25 poäng.

Hjälpmedel: Valfri räknare och formelsamling. Anteckningar är *ej* tillåtna.

Resultat: Anslås 1998-02-02, Matematiskt Centrum, Eklandagatan 86.

Samma uppgifter gäller även för den gamla kursen (TIN080)

Uppgift 1. Volymen V hos en stympad pyramid med höjden h och ytorna B_1 och B_2 hos "golv" respektive "tak" uppfyller

$$V = \frac{h}{3}\left(B_1 + \sqrt{B_1 B_2} + B_2\right)$$

(a). Ange en formel som beskriver hur störningar (mätfel) i h, B_1 och B_2 påverkar volymen V. **(2p)**

(b). Följande värden är uppmätta: $h = 6 \pm 0.3$, $B_1 = 8 \pm 0.2$ och $B_2 = 3 \pm 0.1$. Om man vill förbättra noggrannheten i V genom att mäta med större precision, vilken av storheterna h, B_1 eller B_2 bör man i första hand bestämma noggrannare? **(2p)**

Uppgift 2. Vi vill lösa ekvationen

$$f(x) \equiv \exp(-ax^2) - \ln(x+b) = 0$$

där $a = 2.533 \pm 10^{-3}$ och $b = 0.543 \pm 2 \cdot 10^{-3}$ med den noggrannhet som är rimlig med tanke på osäkerheten i a och b.

(a). Beräkna med Newtons metod lösningen med fyra korrekta decimaler. Feluppskattning krävs. **(3p)**

(b). Ge en formel som beskriver hur x påverkas av osäkerheten i värdena på a och b. Vad kan $|\delta x|$ uppskattas med i aktuellt fall. **(2p)**

Uppgift 3. Betrakta Duffings differentialekvation

$$\begin{cases} x'' + x^3 + 0.05x' = 0 \\ x(0) = 1,\ x'(0) = 0 \end{cases}$$

Bestäm $x(0.2)$ approximativt med Heuns metod. Använd steglängderna $h = 0.2$ och 0.1. **(5p)**

Om ekvationen skrivs $y' = f(t, y)$ så ges Heuns metod av $y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}\{k_1 + k_2\}$ där $k_1 = hf(t_n, y_n)$ och $k_2 = hf(t_{n+1}, y_n + k_1)$.

Fortsättning följer ⇒ ⇒ ⇒

Uppgift 4. Betrakta följande randvärdesproblem

$$\begin{cases} y'' = \sqrt{1+(y')^2}, \; 0 \le x \le 1 \\ y(0) = 0.3, \; y(1) = 0 \end{cases}$$

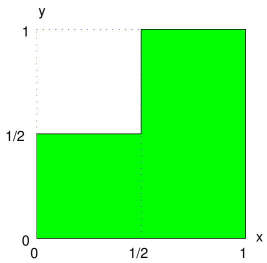
(a). Diskretisera problemet genom att införa ett nät och ersätta derivatorna med *lämpliga* differensapproximationer. **(3p)**

(b). Tag $h = \frac{1}{3}$. Vad blir det diskreta problemet i detta fall. **(1p)**

(c). Skriv upp Newtoniterationen för den ickelinjära ekvationen i (b). Ange den aktuella funktionen och dess Jacobianmatris. **(2p)**

Uppgift 5. Betrakta följande elliptiska problem

$$\begin{cases} -(u_{xx} + u_{yy}) = 2, \; (x,y) \in L \\ u = 0, \; (x,y) \in \partial L \end{cases}$$



där L är det skuggade området här till höger.

Diskretisera problemet genom att införa ett ekvidistant nät med maskvidden $h = \frac{1}{4}$.

Låt t.ex. $u_{i,j}$ beteckna approximationen av $u(x_i, y_j)$. Skriv upp det linjära ekvationssystem som uppkommer. **(5p)**