Chalmers Tekniska Högskola **CTH HT-97**
Matematik

Övningstenta 1. Numerisk analys för M2, TDA160

Betygsgränser: 10, 15 resp. 20 poäng. Tentan omfattar totalt 25 poäng.

Hjälpmedel: Valfri räknare och formelsamling. Anteckningar är *ej* tillåtna.

Uppgift 1. I ett rör med yttertemperatur T_b och innertemperatur T_a uppkommer en dragspänning proportionell mot temperaturskillnaden $T_b - T_a$ enligt

$$\sigma_{\max} = \frac{\alpha\, E\,(T_b - T_a)}{2(1-\nu)} \left(\frac{2}{1-\frac{a^2}{b^2}} - \frac{1+2\ln(\frac{b}{a})}{\ln(\frac{b}{a})} \right)$$

där a är rörets inre radie och b är dess yttre. Vid tunnväggigt rör, $\frac{b}{a} \approx 1$, blir det låg noggrannhet vid beräkningen av uttrycket inom parantesen till höger i formeln. I detta fall ersätts formeln av

$$\sigma_{\max} \approx \frac{\alpha\, E\,(T_b - T_a)}{2(1-\nu)} \left(\frac{h}{3a} - 1 \right)$$

där $h = b - a$ är godstjockleken. Härled denna approximation.

Ledning: Låt $x = \frac{h}{a}$. Då gäller $\frac{b}{a} = 1 + x$. Taylorutveckling ger $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots$ **(4p)**

Uppgift 2. Vi vill lösa följande ekvationssystem

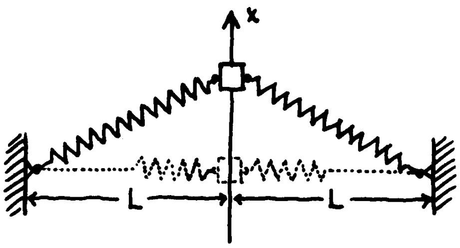
$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0 \\ x_1 x_2 - 0.1 = 0 \end{cases}$$

(a). Skriv upp Newtons metod för ett ekvationssystem. Ange funktion och derivatamatris för det aktuella systemet. **(2p)**

(b). Tag ett Newtonsteg från startapproximationen $x^{(0)} = (1, 0)$. Redovisa delresultaten. **(2p)**

Uppgift 3. Betrakta följande mekaniska system.

En masspunkt, med massan $m = 0.1$, hålls fast av två likadana fjädrar, med fjäderkonstanter $k = 0.2$. Då fjädrarna är obelastade har de längden $L = 0.1$.



Vi drar ut masspunkten ett stycke $x_0 = 0.1$, från neutralläget, i x-axelns riktning och släpper av. Då beskrivs partikelns rörelse av begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} x'' = 2\frac{k}{m}\left(-x + \frac{Lx}{\sqrt{L^2+x^2}}\right) \\ x(0) = x_0,\ x'(0) = 0 \end{cases}$$

Fortsättning följer ⇒ ⇒ ⇒

(a). Skriv om ekvationen som ett första ordningens system. **(1p)**

(b). Bestäm $x(0.5)$ och $x(1)$ approximativt med Heuns metod. Använd steglängderna $h = 0.5$ och 0.25. Om räknandet tar alltför lång tid behöver du inte räkna med det kortare steget i fallet $x(1)$. Redovisa alla delresultat. **(4p)**

Uppgift 4. Betrakta följande ickelinjära randvärdesproblem för ordinär differentialekvation

$$\begin{cases} -y'' + \cos^2(y) = 4x, \ 0 < x < 1 \\ y(0) = 0.5, \ \ y(1) = 0 \end{cases}$$

(a). Diskretisera problemet på lämpligt sätt. Ange det uppkomna ickelinjära ekvationssystemet. **(2p)**

(b). Visa att med $h = 0.5$ så ges approximationen till $y(0.5)$ av lösningen till den ickelinjära ekvationen $8z + \cos^2(z) - 4 = 0$. **(1p)**

(c). Lös ekvationen i (b) med Newtons metod. Fyra korrekta decimaler vill vi ha och feluppskattning. **(3p)**

Uppgift 5. Utböjningen w hos en fritt upplagd platta som belastas med ett tryck q beskrivs av följande system av elliptiska ekvationer

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = \frac{q}{D} \\ w_{xx} + w_{yy} = u \end{cases}$$

där D är plattstyvheten. ($D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ med h platttjockleken och ν Poissons tal.) Randvillkoren är att $u = 0$ och $w = 0$ på kanterna av plattan.

Antag att plattan är kvadratisk med sidan L. Diskretisera problemet genom att införa ett ekvidistant med steglängden $h = \frac{L}{n+1}$ i x- och y-led samt ersätt andra derivatorna med centraldifferensapproximationer. Låt t.ex. $u_{i,j}$ och $w_{i,j}$ beteckna approximationer av $u(x_i, y_j)$ respektive $w(x_i, y_j)$.

Skriv upp de linjära ekvationssystem som skall lösas. **(5p)**