Chalmers Tekniska Högskola **CTH HT-97**
Matematik

Övningstenta 2. Numerisk analys för M2, TDA160

Betygsgränser: 10, 15 resp. 20 poäng. Tentan omfattar totalt 25 poäng.

Hjälpmedel: Valfri räknare och formelsamling. Anteckningar är *ej* tillåtna.

Uppgift 1. Keplers ekvation relaterar vinkeln ϕ (radianer) i planetbanan till tiden t genom

$$\phi - e\sin(\phi) = a(t - t_0)$$

där t_0 är starttiden (motsvarande $\phi = 0$). Vi söker vinkeln ϕ för $t = 1.0$ då $a = 0.5$, $t_0 = 0$ och $e = 0.4$.

(a). Ge en lämplig startapproximation. Beräkna med Newtons metod lösningen med fyra korrekta decimaler. Feluppskattning krävs. **(3p)**

(b). Ge en formel som beskriver hur ϕ påverkas av eventuell osäkerhet i värdena på a och e. Vad kan $|\delta\phi|$ uppskattas med i aktuellt fall. **(2p)**

Uppgift 2. Man vill bestämma parametrarna a, b och c i följande linjära modell för värmekapaciteten

$$C_p(T) = a + bT + cT^{-2}$$

så att den ansluter så bra som möjligt till följande mätdata för ett visst ämne

T (K)	300	400	500	600	700	800	900	1000
C_p (J/mol K)	40.82	48.10	55.09	61.25	66.60	71.26	75.33	78.90

Sätt upp det överbestämda ekvationssystem som ger a, b och c. **(3p)**

Uppgift 3. I differentialekvationer som beskriver förskjutningar i en linjärt elastisk skiva förekommer bl.a. andra ordningens blandade partiella derivata u_{xy}. Vi vill approximera denna derivata med en differenskvot. Antag att vi har ett likformigt nät med samma maskvidd h i både x och y-led. Härled en differenskvot som har noggrannhet $\mathcal{O}(h^2)$. **(6p)**

Uppgift 4. Betrakta följande randvärdesproblem för ordinär differentialekvation

$$\begin{cases} (1+x^2)y'' - y = 1, \ 0 < x < 1 \\ y(0) + \gamma y'(0) = 0, \ \ y(1) = 0 \end{cases}$$

där γ är en konstant.

(a). Diskretisera problemet på lämpligt sätt. Ange det uppkomna linjära ekvationssystemet. **(3p)**

(b). Vad har koefficientmatrisen för struktur och hur kan denna utnyttjas för att man effektivt skall kunna räkna fram lösningen? **(1p)**

(c). Handräkna fram lösningen för $\gamma = 1$ och $h = 0.5$. **(2p)**

Fortsättning följer ⇒ ⇒ ⇒

Uppgift 5. Betrakta det ickelinjära värmeledningsproblemet

$$\begin{cases} u_t = c(u)\, u_{xx},\ 0 < x < 1,\ t > 0 \\ u(x,0) = g(x),\ 0 < x < 1 \\ u(0,t) = f_1(t),\ u(1,t) = f_2(t),\ t > 0 \end{cases}$$

Diskretisera problemet genom att införa ett nät med steglängden h i rumsled och steglängden k i tidsled och ersätta u_t med en framåtdifferenskvot och u_{xx} med en centraldifferenskvot. Låt t.ex. $u_{i,j}$ beteckna approximationen av $u(x_i, t_j)$.

Ange differensekvationen. Glöm inte bort att få med begynnelse- och randvillkoren samt funktionen $c(u)$. **(5p)**