Partiella differentialekvationer—tidsberoende problem TM4, 1990–11–01

Telefon: Stig Larsson 72 35 43, 45 46 93
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

---

1. Lös systemet

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \begin{bmatrix} 0 & x \\ x & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad x \in \mathbf{R},\ t > 0,$$
$$u(x,0) = \begin{bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{bmatrix}, \qquad x \in \mathbf{R}.$$

2. Betrakta begynnelse-randvärdesproblemet

$$u_t - \Delta u = f(x,t), \qquad x \in \Omega,\ t > 0,$$
$$u(x,t) = 0, \qquad x \in \Gamma,\ t > 0,$$
$$u(x,0) = v(x), \qquad x \in \Omega,$$

där $\Omega \subset \mathbf{R}^2$. (a) Formulera en semidiskret finit elementmetod för detta problem. (b) Visa en uppskattning för L_2-normen av felet. (c) Visa att (med beteckningar enligt kompendiet)

$$\|u_h(t)\| \leq C(T) t^{-1/2} \left(\|v_h\| + \left(\int_0^t \|f(\cdot,s)\|^2 \, ds \right)^{\frac{1}{2}} \right), \qquad 0 < t < T.$$

3. Crank-Nicolsons metod för

$$u_t = a u_x, \qquad x \in \mathbf{R},\ t > 0,$$
$$u(x,0) = v(x), \qquad x \in \mathbf{R},$$

är

$$\partial_t U_j^n = \tfrac{1}{2} a \hat{\partial}_x (U_j^{n+1} + U_j^n),$$

där $\partial_t U_j^n = (U_j^{n+1} - U_j^n)/k$ och $\hat{\partial}_x U_j^n = (U_{j+1}^n - U_{j-1}^n)/2h$. Visa att metoden är stabil i L_2.

4. Låt

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{j=1}^{d} A_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + Bu = 0, \qquad x \in \mathbf{R}^d,\ t > 0,$$
$$u(x,0) = v(x), \qquad x \in \mathbf{R}^d,$$

vara ett Friedrichs system med N ekvationer. Antag dessutom att koefficientmatriserna A_j, B är konstanta och att B är symmetrisk, positivt semidefinit. Visa att

$$\|u(\cdot,t)\| \leq \|v\|, \qquad t \geq 0,$$

där $\|\cdot\|$ är L_2-normen över $\mathbf{R}^d$. Det får antagas att $u(x,t) \to 0$ då $|x| \to \infty$. Vilken uppskattning kan du visa för $\|u(\cdot,t)\|$ om koefficientmatriserna beror på x, t?

5. (a) Formulera och bevisa maximumprincipen för värmeledningsekvationen. (b) Låt u vara lösningen till

$$\begin{aligned} &u_t - \Delta u = 0, \qquad && x \in \Omega,\ t > 0, \\ &u(x,t) = 0, && x \in \Gamma,\ t > 0, \\ &u(x,0) = v(x), && x \in \Omega, \end{aligned}$$

där $\Omega = \{x \in \mathbf{R}^2 : 0 < x_i < 1,\ i = 1,2\}$. Låt $\varphi(x) = A \sin \pi x_1 \sin \pi x_2$ där $A > 0$. Visa att om $0 \le v(x) \le \varphi(x)$ för $x \in \Omega$, så är $0 \le u(x,t) \le e^{-2\pi^2 t}\varphi(x)$ för $x \in \Omega,\ t > 0$.