Partiella differentialekvationer—tidsberoende problem TM4, 1992–11–04

Telefon: Stig Larsson, 772 35 43
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

---

1. (a) Lös systemet

$$\begin{aligned} y_t + y_x - 3z_x &= 0, \\ z_t - 3y_x + z_x &= 0, \end{aligned} \qquad x \in \mathbf{R},\ t > 0,$$

med hjälp av karakteristikmetoden. Använd begynnelsevillkoren $y(x,0) = \cos x$, $z(x,0) = 0$. (b) Ange Friedrichs differensmetod för ovanstående begynnelsevärdesproblem. Undersök stabiliteten i L_2. (c) Betrakta nu systemet i området $x \in (0,1)$, $t > 0$. Ange en uppsättning begynnelse- och randvillkor som gör problemet rätt ställt.

2. Betrakta begynnelse-randvärdesproblemet

$$\begin{aligned} &u_t - \Delta u = f(x,t), && x \in \Omega,\ t > 0, \\ &u(x,t) = 0, && x \in \Gamma,\ t > 0, \\ &u(x,0) = v(x), && x \in \Omega, \end{aligned}$$

där $\Omega \subset \mathbf{R}^d$ är ett begränsat område. Visa följande uppskattningar:

(a) $$\|u(t)\|^2_{H_0^1} + \int_0^t \|u_t(s)\|^2\, ds \le \|v\|^2_{H_0^1} + \int_0^t \|f(s)\|^2\, ds,$$

(b) $$\|\Delta u(t)\|^2 \le Ct^{-1}\Big(\|v\|^2_{H_0^1} + \int_0^t (\|f(s)\|^2 + s\|f(s)\|^2_{H_0^1})\, ds\Big).$$

3. Betrakta problemet i uppgift 2 men nu med $\Omega = (0,1)$ och $f(x,t) \equiv 0$. Formulera Crank-Nicolson differensmetoden. Bevisa stabilitet i diskret L_2-norm. Bevisa en feluppskattning.

4. (a) Formulera och bevisa maximumprincipen för värmeledningsekvationen. (b) Låt u_1, u_2 vara två lösningar till problemet i uppgift 2 med data $f_1(x,t) \le f_2(x,t)$ och $v_1(x) \le v_2(x)$ för $x \in \Omega$, $t \ge 0$. Visa att $u_1(x,t) \le u_2(x,t)$ för $x \in \Omega$, $t \ge 0$.

5. Betrakta följande begynnelse-randvärdesproblem för Schrödingerekvationen:

$$\begin{aligned} &-iu_t - \Delta u + f(x)u = 0, && x \in \Omega \subset \mathbf{R}^2,\ t > 0, \\ &u(x,t) = 0, && x \in \Gamma,\ t > 0, \\ &u(x,0) = v(x), && x \in \Omega. \end{aligned}$$

Här är $u = u(x,t)$ en komplexvärd funktion, potentialen $f = f(x)$ är reellvärd och $i^2 = -1$.

(a) Ge en svag formulering av detta problem.

(b) Visa att $\|u(t)\|^2 = \|v\|^2$ för $t \ge 0$. Tips: Visa först att $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2 = \mathrm{Re}(u_t, u)$, där som vanligt $(u,v) = \int_\Omega u\bar{v}\, dx$ och $\|u\|^2 = \int_\Omega |u|^2\, dx$. (Kvantiteten $|u(x,t)|^2$ är en sannolikhetstäthet och därför bör totala sannolikheten $\|u(t)\|^2$ vara $= 1$, vilket alltså gäller om $\|v\|^2 = 1$.)

(c) Väntevärdet för energin är $E(t) = \|u(t)\|^2_{H_0^1} + (fu(t), u(t))$. Visa att $E(t) = E(0)$ för $t \ge 0$.

(d) Formulera en semidiskret finita elementmetod för detta problem och bevisa en feluppskattning.