Lösningar: PDE—tidsberoende problem TM4, 1992–11–04

1a. Systemet kan skrivas $u_t + Au_x = 0$ med $u = \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}$ och $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$. Diagonalisera A:

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad P^T A P = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad w = P^T u,$$

och systemet blir

$$w_t + \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} w_x = 0, \quad x \in \mathbf{R},\ t > 0; \qquad w(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \cos x \\ \cos x \end{bmatrix}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

De karakteristiska kurvorna genom punkten $(\bar{x}, \bar{t})$ är

$$x = x_1(t) = \bar{x} - 2(t - \bar{t}), \quad x = x_2(t) = \bar{x} + 4(t - \bar{t}).$$

Komponenten w_i är konstant längs $x = x_i(t)$:

$$w_1(\bar{x}, \bar{t}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(\bar{x} + 2\bar{t}), \quad w_2(\bar{x}, \bar{t}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(\bar{x} - 4\bar{t}),$$

och lösningen blir

$$u(x,t) = Pw(x,t) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \cos(x+2t) + \cos(x-4t) \\ \cos(x+2t) - \cos(x-4t) \end{bmatrix}.$$

1b. Friedrichs metod

$$\frac{1}{k}\Big(U^{n+1}(x) - \frac{1}{2}(U^n(x+h) + U^n(x-h))\Big) + \frac{1}{2h} A \Big(U^n(x+h) + U^n(x-h)\Big) = 0,$$

det vill säga

$$U^{n+1}(x) = \frac{1}{2}(I - \lambda A) U^n(x+h) + \frac{1}{2}(I + \lambda A) U^n(x-h),$$

är stabil i $L_2(\mathbf{R})$ om och endast om $\lambda |A| \le 1$, se kompendiet sidan 93. Här är $|A| = \max(|-2|, |4|) = 4$ och villkoret blir $\lambda = \frac{k}{h} \le \frac{1}{4}$.

1c. Linjen $x = 1$ är inflödesrand för komponenten $w_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(y + z)$ och utflödesrand för $w_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(y - z)$. Därför kan vi föreskriva $w_1(1,t) = a(t) w_2(1,t) + b(t)$ med godtyckliga $a(t)$, $b(t)$. Linjen $x = 0$ är inflödesrand för komponenten w_2 och utflödesrand för w_1 och vi föreskriver $w_2(0,t) = c(t) w_1(0,t) + d(t)$. Uttryckt i de ursprungliga variablerna blir detta

$$(1 - a(t)) y(1,t) + (1 + a(t)) z(1,t) = \sqrt{2} b(t), \quad (1 - c(t)) y(0,t) - (1 + c(t)) z(0,t) = \sqrt{2} d(t).$$

Linjen $t = 0$ är inflödesrand för både w_1 och w_2 och vi ger begynnelsevillkor för dessa funktioner, eller, vilket är samma sak, $y(x,0) = y_0(x)$, $z(x,0) = z_0(x)$.

---

2. Uppskattningen (a) finns i kompendiet Sats 2.5. För att bevisa (b) multiplicerar vi differentialekvationen med $-\Delta u_t$ och integrerar över Ω med användande av Greens formel:

$$-(u_t, \Delta u_t) + (\Delta u, \Delta u_t) = -(f, \Delta u_t)$$

$$\|u_t\|_{H_0^1}^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\Delta u\|^2 = (\nabla f, \nabla u_t) \le \|f\|_{H_0^1} \|u_t\|_{H_0^1} \le \frac{1}{2} \|f\|_{H_0^1}^2 + \frac{1}{2} \|u_t\|_{H_0^1}^2$$

$$\|u_t\|^2_{H^1_0} + \frac{d}{dt}\|\Delta u\|^2 \leq \|f\|^2_{H^1_0}$$

Multiplicera med t:

$$\frac{d}{dt}\Big(t\|\Delta u\|^2\Big) \leq \|\Delta u\|^2 + t\|f\|^2_{H^1_0}$$

Integrera:

$$t\|\Delta u(t)\|^2 \leq \int_0^t \Big(\|\Delta u(s)\|^2 + s\|f(s)\|^2_{H^1_0}\Big)\,ds$$

Eftersom $\|\Delta u\| \leq \|u_t\| + \|f\|$ ger uppskattningen i (a) att

$$\int_0^t \|\Delta u\|^2\,ds \leq C\Big(\|v\|^2_{H^1_0} + \int_0^t \|f(s)\|^2\,ds\Big)$$

och uppskattningen (b) följer.

---

3. Se kompendiet avsnitt 3.2.

4a. Se kompendiet Sats 2.6.
4b. Funktionen $w = u_1 - u_2$ satisfierar $w_t - \Delta w = f_1 - f_2 \leq 0$ i $\Omega \times (0,T]$. Enligt maximumprincipen antar w sitt maximum på paraboliska randen. Men på $\Gamma \times [0,T]$ har vi $w = 0$ och på $\Omega \times \{0\}$ har vi $w(x,0) = v_1(x) - v_2(x) \leq 0$. Alltså är $w \leq \max w = 0$, dvs $u_1 \leq u_2$.

5a.

$$\begin{aligned}
&u(t) \in H^1_0(\Omega)\\
&-i(u_t,\chi) + (\nabla u, \nabla\chi) + (fu,\chi) = 0, \qquad \forall\chi \in H^1_0(\Omega)\\
&u(0) = v
\end{aligned}$$

5b.

$$\frac{d}{dt}\|u\|^2 = \frac{d}{dt}(u,u) = (u_t,u) + (u,u_t) = (u_t,u) + \overline{(u_t,u)} = 2\,\mathrm{Re}(u_t,u)$$

Tag $\chi = u$:

$$-i(u_t,u) + \|\nabla u\|^2 + (fu,u) = 0$$

$$(u_t,u) = -i\Big(\|\nabla u\|^2 + (fu,u)\Big)$$

dvs (u_t,u) är rent imaginär, så att $\frac{d}{dt}\|u\|^2 = 0$ och påståendet följer.
5c. På liknande sätt har vi $\frac{d}{dt}E = 2\,\mathrm{Re}\Big((\nabla u, \nabla u_t) + (fu,u_t)\Big)$ och $\chi = u_t$ ger

$$-i\|u_t\|^2 + (\nabla u, \nabla u_t) + (fu,u_t) = 0$$

dvs $(\nabla u, \nabla u_t) + (fu,u_t)$ är rent imaginär, så att $\frac{d}{dt}E = 0$.
5d. Låt $S_h \subset H^1_0(\Omega)$ vara ett finita elementrum bestående av styckvis linjära funktioner på vanligt sätt. Den semidiskreta finita elementmetoden blir

$$\begin{aligned}
&u_h(t) \in S_h\\
&-i(u_{h,t},\chi) + (\nabla u_h, \nabla\chi) + (fu_h,\chi) = 0, \qquad \forall\chi \in S_h\\
&u_h(0) = v_h
\end{aligned}$$

Vi använder den vanliga uppdelningen $u_h - u = (u_h - R_h u) + (R_h u - u) = \theta + \rho$ av felet (se beviset av Sats 4.1 i kompendiet). Här är

$$\|\rho(t)\| \le Ch^2 \|u(t)\|_{H^2} \le Ch^2 \Big(\|v\|_{H^2} + \int_0^t \|u_t(s)\|_{H^2}\, ds \Big).$$

Funktionen $\theta \in S_h$ satisfierar

$$-i(\theta_t, \chi) + (\nabla\theta, \nabla\chi) + (f\theta, \chi) = i(\rho_t, \chi) - (f\rho, \chi), \qquad \forall \chi \in S_h.$$

Vi imiterar argumentet i **5b** (obs att alla funktioner utom f är komplexvärda):

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\theta\|^2 &= \mathrm{Re}(\theta_t, \theta) = \mathrm{Re}\Big(-i\|\nabla\theta\|^2 - i(f\theta, \theta) - (\rho_t, \theta) - i(f\rho, \theta) \Big) \\ &= -\mathrm{Re}\Big((\rho_t, \theta) + i(f\rho, \theta) \Big) \le \Big(\|\rho_t\| + \|f\|_{L_\infty} \|\rho\| \Big) \|\theta\|.\end{aligned}$$

Eftersom $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\theta\|^2 = \|\theta\| \frac{d}{dt}\|\theta\|$ och om vi antar att $\|f\|_{L_\infty} \le C$, får vi

$$\frac{d}{dt}\|\theta\| \le C\Big(\|\rho_t\| + \|\rho\| \Big)$$

och efter integration

$$\|\theta(t)\| \le \|\theta(0)\| + C\int_0^t \Big(\|\rho_t(s)\| + \|\rho(s)\| \Big)\, ds$$

vilket leder till (se beviset av Sats 4.1)

$$\|u_h(t) - u(t)\| \le \|v_h - v\| + Ch^2 \Big(\|v\|_{H^2} + \int_0^t \Big(\|u_t(s)\|_{H^2} + \|u(s)\|_{H^2} \Big)\, ds \Big).$$