Flervariabelanalys E2, Vecka 5 Ht07

Omfattning och innehåll

- **15.1** Vektorfält och skalärfält
- **15.2** Konservativa vektorfält (t.o.m. exempel 5)
- **15.3** Kurvintegraler
- **15.4** Kurvintegral av vektorfält
- **15.5** Ytor och ytintegraler
- **15.6** Orienterade ytor och flödesintegraler (normal-ytintegraler)

.

Mål Denna vecka skall du lära dig

skissa ett vektorfält i planet och beräkna fältlinjer till det.

definiera begreppet *konservativt vektorfält* och beräkna *potential* till ett konservativt fält.

förklara sambandet mellan nivåkurvor till en potential och fältlinjerna till ett konservativt vektorfält.

definiera begreppen *kurvintegral av en funktion* och *kurvintegralav ett vektorfält* och kunna beräkna sådana integraler genom parametrisering av kurvan.

Mål Denna vecka skall du också lära dig

definiera begreppen *område, sammanhängande område* och *enkelt samanhängande område.*

formulera och tillämpa satsen om kurvintegralers oberoende av integrationsvägen.

definiera begreppen *ytintegral av en funktion över en yta* och *flöde av ett vektorfält genom en orienterad yta* och kunna beräkna sådana integraler och flöden genom parametrisering av ytan.

tma043 V5, Ht07 bild 3

Ett vektorfält i planet är en funktion $\mathbf{F}$ från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^2$.
$\mathbf{F}(x, y) = f(x, y)\mathbf{i} + g(x, y)\mathbf{j}$

Vi uppfattar (x, y) som en punkt i planet och $\mathbf{F}(x, y)$ som en vektor i planet.

För att åskådliggöra vektorfältet väljer vi ett antal punkter (x_i, y_i) och avsätter vektorerna $\mathbf{F}(x_i, y_i)$ i respektive punkter.

Adams 15.1, tma043 V5, Ht07 bild 4

Ett vektorfält i rummet är en funktion $\mathbf{F}$ från $\mathbb{R}^3$ till $\mathbb{R}^3$.
$\mathbf{F}(x, y, z) = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}$
uppfattad på samma sätt som vektorfält i planet.

Adams 15.1, tma043 V5, Ht07 bild 5

Fältlinjerna till ett vektorfält är kurvor vars tangenter är parallella med vektorfältets vektorer.

Alltså: Låt (a, b) vara en punkt i definitionsmängden till vektorfältet $\mathbf{F}(x, y) = f(x, y)\mathbf{i} + g(x, y)\mathbf{j}$.

En fältlinje genom denna punkt är en kurva $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ sådan att

$\mathbf{r}(t_0) = (x(t_0), y(t_0) = (a, b)$ och

$x'(t_0)\mathbf{i} + y'(t_0)\mathbf{j}$ är parallell med $f(a, b)\mathbf{i} + g(a, b)\mathbf{j}$

Adams 15.1, tma043 V5, Ht07 bild 6

Fältlinjerna är lösningarna till differentialekvationen

$$\frac{dx}{f(x,y)} = \frac{dy}{g(x,y)}$$

Adams 15.1, tma043 V5, Ht07 bild 7

Ett vektorfält, $\mathbf{F}(x,y,z) = f(x,y,z)\mathbf{i} + g(x,y,z)\mathbf{j} + h(x,y,z)\mathbf{k}$ med definitionsmängd D, kallas *konservativt* om det finns en funktion $\phi(x,y,z)$ definierad på D, sådan att

$$\nabla\phi(x,y,z) = \mathbf{F}(x,y,z) \text{ för alla } (x,y,z) \in D$$

Funktionen $\phi(x,y,z)$ kallas *potential* till $\mathbf{F}(x,y,z)$.

Nivåytorna $\phi(x,y,z) = C$ kallas ekvipotentialytor till $\mathbf{F}(x,y,z)$

Adams 15.2, tma043 V5, Ht07 bild 8

Ett vektorfält, $\mathbf{F}(x,y,) = f(x,y)\mathbf{i} + g(x,y)\mathbf{j}$ med definitionsmängd D, kallas *konservativt* om det finns en funktion $\phi(x,y)$ definierad på D, sådan att

$$\nabla\phi(x,y) = \mathbf{F}(x,y) \text{ för alla } (x,y) \in D$$

Funktionen $\phi(x,y)$ kallas *potential* till $\mathbf{F}(x,y)$.

Nivåkurvorna $\phi(x,y) = C$ kallas ekvipotentialkurvor till $\mathbf{F}(x,y)$

Fältlinjerna till $\mathbf{F}(x,y)$ är ortogonala mot ekvipotentialkurvorna till $\mathbf{F}(x,y)$

Adams 15.2, tma043 V5, Ht07 bild 9

Om $\mathbf{F}(x,y,) = f(x,y)\mathbf{i} + g(x,y)\mathbf{j}$ är konservativt i D så måste gälla att:

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} g(x,y)$$

i alla punkter $(x,y) \in D$

Adams 15.2, tma043 V5, Ht07 bild 10

Med *kurvintegralen av* $f(x, y, z)$ över (eller längs) kurvan $\mathcal{C}$ menas integralen

$$\int_{\mathcal{C}} f(x, y, z) ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t) \left| \mathbf{r}'(t) \right| dt$$

där $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \quad a \leq t \leq b$ är en parametrisering av kurvan $\mathcal{C}$.

Adams 15.3, tma043 V5, Ht07 bild 11

Med *kurvintegralen av den tangentiella komponenten av* $\mathbf{F}(x, y, z)$ över (eller längs) kurvan $\mathcal{C}$ menas integralen

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{T}} ds$$

där $\hat{\mathbf{T}}$ är en enhetstangent till kurvan $\mathcal{C}$.
Men $\hat{\mathbf{T}} ds = \mathbf{r}'(t) dt$ så

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt$$

Adams 15.4, tma043 V5, Ht07 bild 12

Definition: Ett område D kallas *sammanhängande* om varje par av punkter P och Q i D kan bindas samman med en styckvis glatt kurva som ligger helt i D.

Definition: Ett område D kallas *enkelt sammanhängande* om varje *enkel sluten kurva* kan dras samman till en punkt utan att lämna D under sammandragningen.

Adams 15.4, tma043 V5, Ht07 bild 13

Låt D vara ett öppet sammanhängande område och låt $\mathbf{F}$ vara ett glatt vektorfält definierat på D.
Då är följande tre utsagor ekvivalenta i den meningen att om ett av dem är sant (för ett visst vektorfält och ett visst område) så är de andra två också sanna.

(a) $\mathbf{F}$ är konservativt i D

(b) $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0$ för varje sluten styckvis glatt kurva $\mathcal{C}$ i D.

(c) Om $\mathcal{C}_1$ och $\mathcal{C}_2$ är två kurvor i D med gemensamma start- och slutpunkter så är $\int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$.

Adams 15.4, tma043 V5, Ht07 bild 14

OBS! Om $\mathbf{F}$ är konservativt med potential ϕ och $\mathcal{C}_1$ har startpunkt P_0 och slutpunkt P_1 så är

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \phi(P_1) - \phi(P_0)$$

Adams 15.4, tma043 V5, Ht07 bild 15

En parametriserad yta i rummet är en kontinuerlig funktion $\mathbf{r}$ definierad på en rektangel $R = \{(uv) : a \leq u \leq b, \quad c \leq v \leq d\}$ (eller annat slutet begränsat område med väldefinierad area) i uv-planet och med värden i $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{r}(u,v) = x(u,v)\mathbf{i} + y(u,v)\mathbf{j} + z(u,v)\mathbf{k} \quad (u,v) \in R$$

Här tänker vi oftast på $x(u,v)\mathbf{i} + y(u,v)\mathbf{j} + z(u,v)\mathbf{k}$ som koordinaterna för *punkten* (x,y,z). Dessutom uppfattar vi oftast *värdemängden* för $\mathbf{r}(u,v)$ som den parametriserade ytan, inte funktionen själv.

Adams 15.5, tma043 V5, Ht07 bild 16

Notera att alla punkter på ytan är randpunkter eftersom ytan är ett tvådimensionellt objek i $\mathbb{R}^3$. Punkter på ytan som motsvaras av inre punkter i området R kallas trots detta inre punkter på ytan.

Randen till området R avbildas ibland, men inte alltid på en kurva som avgränsar ytan. Den kurvan kallas i så fall för *ytans rand.*

Adams 15.5, tma043 V5, Ht07 bild 17

Om ytan beskrivs geometriskt och vi skall hitta/ge en parametrisering av ytan så kräver vi att den (funktionen) skall vara en-entydig utom möjligen på randen till området R.

Adams 15.5, tma043 V5, Ht07 bild 18

En yta kallas glatt om det finns ett tangentplan i varje punkt (utom i randpunkterna)
En parametriserad yta är glatt om funktionerna som ger parametriseringen har kontinuerliga partiella derivator.

Ytan kallas *styckvis glatt* om den är sammansatt av glatta ytor, "hopklistrade" längs randkurvor.
Definition 5 i boken säger att en punktmängd S i $\mathbb{R}^3$ är en glatt yta om den lokalt är nivåyta till en glatt funktion g med normalvektor $\nabla g \neq \mathbf{0}$. Detta är uppfyllt av parametriserade ytor med $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \neq \mathbf{0}$.

Adams 15.5, tma043 V5, Ht07 bild 19

Ett infinitesimalt ytelement har arean $dS = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| dudv$.

En normalvektor till ytan i punkten $\mathbf{r}(u, v)$ ges av

$$\mathbf{n} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}\mathbf{i} + \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}\mathbf{j} + \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\mathbf{k}$$

$$\text{Arean av ytan } \mathcal{S} = \iint_{\mathcal{S}} dS = \iint_R \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| dudv$$

Ytintegralen av en funktion $f(x, y, z)$ över ytan $\mathcal{S}$ ges av integralen

$$\iint_{\mathcal{S}} f(x, y, z) dS = \iint_R f(x(uv), y(u, v), z(u, v)) \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| dudv$$

Adams 15.5, tma043 V5, Ht07 bild 20

En yta $\mathcal{S}$ kallas *orienterbar* om det finns ett enhetsvektorfält $\hat{\mathbf{N}}(P)$ definierat och kontinuerligt på $\mathcal{S}$ och i varje punkt ortogonalt mot $\mathcal{S}$. Ett vektorfält som uppfyller dettas kallas för *en orientering av* $\mathcal{S}$.

Om $\mathcal{S}$ är en parametriserad yta med $\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| \neq 0$ i alla punkter på ytan, så ger

$$\hat{\mathbf{N}} = \pm \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}}{\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right|}$$

de två möjliga orienteringarna.

Adams 15.5, tma043 V5, Ht07 bild 21

Ett vektorfälts *flöde* genom en orienterad yta $\mathcal{S}$ ges av ytintegralen

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS \quad \text{eller} \quad \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

För parametriserade ytor är

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS = \pm \iint_{R} \mathbf{F}(\mathbf{r}(\mathbf{u}, \mathbf{v})) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} dudv$$

Val av tecken $\pm$ innebär ett val av riktning i vilken flödet uppfattas positivt.

Adams 15.5, tma043 V5, Ht07 bild 22