TMA043 Flervariabelanalys E2 H09

Carl-Henrik Fant

Matematiska vetenskaper
Chalmers
Göteborgs universitet
tel. (arb) 772 35 57
epost: carl-henrik.fant@chalmers.se

16 september 2009

Outline

1. Flervariabelanalys E2, Vecka 2 Ht09
Kapitel 12.2 – 12.6
   - 12.2 Gränsvärden och kontinuitet.
   - 12.3 Partiella derivator, tangentplan och normaler till funktionsytor.
   - 12.4 Högre ordningens derivator.
   - 12.5 Kedjeregeln.
   - 12.6 Linjära approximationer, differentierbarhet och differentialer.

Centrala begrepp, en liten ordlista:

limit gränsvärde
continuouity kontinuitet
partial derivative partiell derivata
tangent plane tangent plan
normal line normallinje
linear approximation linjär approximation
differentiability differentierbarhet
differential differential
Jacobian matrix Jacobimatris, funktionalmatris, derivata

Lärmål

För betyget godkänd skall du kunna:

Adams	Mål
12.2	ge en intuitiv beskrivning av begreppet gränsvärde (som i inledning till 12.2).
12.2	använda räknereglerna (före ex.1) för gränsvärden för funktioner av två variabler.
12.2	förklara vad som menas med att en funktion är kontinuerlig

Lärmål

För högre betyg skall du dessutom kunna:

Adams	Mål
12.2	definiera begreppet gränsvärde och motivera definitionen
12.2	avgöra om en reellvärd funktion av två variabler har gränsvärde och beräkna det.
12.2	ge exempel på funktion av två variabler, som saknar gränsvärde då $(x, y) \to (0, 0)$ men där alla linjevisa gränsvärden: $f(x, kx)$, då $x \to 0$, samt $f(0, y)$, då $y \to 0$, existerar och är lika.
12.2	avgöra om en funktion är kontinuerlig.

Definition: Gränsvärde

Låt f vara en reellvärd funktion av två variabler med definitionsmängd D_f.
Vi säger då att

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L$$

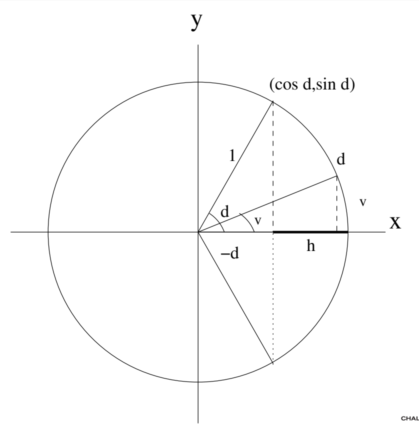
om

1. varje omgivning till (a, b) innehåller punkter i D_f andra än (a, b).
2. till varje positivt tal ϵ finns det ett positivt tal $\delta = \delta(\epsilon)$ sådant att $|f(x, y) - L| < \epsilon$ gäller för alla punkter (x, y) i D_f som uppfyller att $0 < \|(x, y) - (a, b)\| < \delta$.

Tolkning:

$f(x, y)$ har gränsvärdet L då $(x, y) \to (a, b)$ om

1. (a, b) är en inre punkt eller randpunkt till D_f.
2. Skillnaden mellan $f(x, y)$ och L kan fås hur liten som helst, bara man håller sig tillräckligt nära (a, b).



Definition: Kontinuitet

Funktionen $f(x, y)$ kallas kontinuerlig i punkten (a, b) om

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = f(a, b)$$

Notera att detta innebär att (a, b) skall tillhöra D_f, gränsvärdet skall existera **och** vara samma som funktionsvärdet $f(a, b)$.

Lärmål

För betyget godkänd skall du kunna:

Adams	Mål
12.3 12.5	de olika beteckningarna för partiell derivata och beräkna partiella derivator genom att tillämpa deriveringsregler för funktioner av en variabel samt kedjeregeln.
12.3	bestämma tangentplan och normal till funktionsyta.

Lärmål

För högre betyg skall du dessutom kunna:

Adams	Mål
12.3	definiera begreppet partiell derivata och härleda tangentplanets ekvation.

Partiell derivata

Låt f vara en reellvärd funktion av två variabler med definitionsmängd D_f och antag att (a, b) är en inre punkt i D_f. Den partiella derivatan av f med avseende på x är funktionen $f_1(x, y)$ vars funktionsvärde ges av gränsvärdet

$$f_1(x, y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}$$

i de punkter gränsvärdet existerar.
På motsvarande sätt definieras $f_2(x, y)$
Notera att de partella derivatorna bara kan finnas i inre punkter i D_f.

Olika skrivsätt för partiella derivator:

$$f_1(x,y) = D_1 f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = f'_x(x,y) = \frac{\partial z}{\partial x}$$

och i punkten (a,b)

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(a,b)} = \left.\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\right|_{(a,b)} = f'_x(a,b) = f_1(a,b) = D_1 f(a,b)$$

En normalvektor till ytan $z = f(x,y)$ i punkten $(a,b,f(a,b))$ är vektorn

$$\mathbf{n} = f_1(a,b)\mathbf{i} + f_2(a,b)\mathbf{j} - \mathbf{k}$$

En ekvation för normallinjen i punkten är

$$\begin{cases} x = a + t f_1(a,b) \\ y = b + t f_2(a,b) \\ z = f(a,b) - t) \end{cases}$$

En ekvation för tangentplanet i punkten är

$$z = f(a,b) + f_1(a,b)(x-a) + f_2(a,b)(y-b)$$

Lärmål

För betyget godkänd skall du kunna:

Adams	Mål
12.4 12.5	beräkna partiella derivator av högre ordning genom att tillämpa deriveringsregler för funktioner av en variabel samt kedjeregeln.

Lärmål

För högre betyg skall du dessutom kunna:

Adams	Mål

Derivator av högre ordning

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} f'_x(x,y) = f''_{xx}(x,y) = f_{11}(x,y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} f'_y(x,y) = f''_{yx}(x,y) = f''_{21}(x,y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} f'_x(x,y) = f''_{xy}(x,y) = f''_{12}(x,y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} f'_y(x,y) = f''_{yy}(x,y) = f''_{22}(x,y)$$

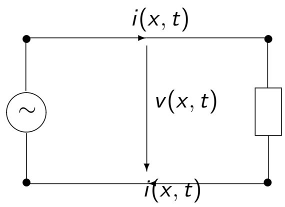
Sats 1

Om alla partiella derivator av ordningar t.o.m n är kontinuerliga så spelar det ingen roll i vilken ordning deriveringarna utförs, resultatet blir detsamma.
Som exempel är

$$f_{1112} = f_{1121} = f_{1211} = f_{2111}$$

om alla derivator t.o.m ordning 4 är kontinuerliga.

Telegrafekvationen



$$\begin{cases} -\frac{\partial v}{\partial x} &= Ri + L\frac{\partial i}{\partial t} \\ -\frac{\partial i}{\partial x} &= Gv + C\frac{\partial v}{\partial t} \end{cases}$$

R = resistans per meter, L = induktans per meter,
G = tvärkonduktans per meter, C = tvärkapacitans per meter.

Förlustfri ledning: $R = G = 0$
Både $v(x,t)$ och $i(x,t)$ satisfierar den endimensionella *vågekvationen*.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= LC\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} &= LC\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} \end{aligned}$$

Samma ekvation satisfieras av transversella svängningar i en sträng. Se exempel 12.4.4.

Lärmål

För betyget godkänd skall du kunna:

Adams	Mål
12.3 12.5	de olika beteckningarna för partiell derivata och beräkna partiella derivator genom att tillämpa deriveringsregler för funktioner av en variabel samt kedjeregeln.
12.4 12.5	beräkna partiella derivator av högre ordning genom att tillämpa deriveringsregler för funktioner av en variabel samt kedjeregeln.

Kedjeregeln

Om $z = f(x, y)$ har kontinuerliga partiella derivator, och om x och y är deriverbara funktioner av t, så gäller att

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

Alternativt skrivsätt:

$$\frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) = f_1((x(t), y(t))x'(t) + f_2((x(t), y(t))y'(t)$$

Kedjeregeln

Om $z = f(x, y)$ har kontinuerliga partiella derivator, och om $x = x(s, t)$ och $y = y(s, t)$ är har partiella derivator, så gäller att

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}$$
$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}$$

Kedjeregeln på matrisform

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{bmatrix}$$

Lärmål

För betyget godkänd skall du kunna:

Adams	Mål
12.6	beräkna linjäriseringen och differentialen för en reellvärd funktion och utnyttja dessa till approximativ beräkning av funktionsvärden.
12.6	beräkna Jacobimatrisen och differentialen för en vektorvärd funktion och utnyttja denna till approximativ beräkning av funktionsvärden.

Lärmål

För högre betyg skall du dessutom kunna:

Adams	Mål
12.6	definiera begreppet differentierbar funktion.
12.6	redogöra för relationerna mellan egenskaperna för en funktion: kontinuerlig, kontinuerliga partiella derivator samt differentierbar
12.6	formulera och bevisa kedjeregeln för $f \circ g$ då $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ och $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ samt formulera kedjeregeln på matrisform för vektorvärda funktioner.

Med **linjärisering (linearisering)** av f i punkten (a, b) menas funktionen

$$L(x, y) = f(a, b) + f_1(a, b) \cdot (x - a) + f_2(a, b) \cdot (y - b)$$

Grafen till linjäriseringen av f i punkten (a, b) är **tangentplanet** till ytan $z = f(x, y)$ i punkten $(a, b, f(a, b))$

En funktion kallas **differentierbar** i punkten (a, b) om

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(a+h, b+k) - f(a, b) - hf_1(a, b) - kf_2(a, b)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

Notera att

$$L(a+h, b+k) = f(a,b) + hf_1(a,b) + kf_2(a,b)$$

och att

$$f(a+h, b+k) - f(a,b) - hf_1(a,b) - kf_2(a,b) = \\ f(a+h, b+k) - L(a+h, b+k) = \epsilon(h,k)$$

där $\epsilon(h,k)$ är felet som uppstår då f ersätts med linjäriseringen L.

f är alltså differentierbar i punkten (a,b) om detta fel är litet i jämförelse med $\|(h,k)\| = \sqrt{h^2+k^2}$.

Sats 4

Om f_1 och f_2 är kontinuerliga i en omgivning till (a,b) så är f differentierbar i (a,b)

Sats 5: Kedjeregeln

Låt $z = f(x,y)$, där $x = u(s,t)$ och $y = v(s,t)$. Antag att:

1. $u(a,b) = p$ och $v(a,b) = q$.
2. u och v har partiella derivator av ordning ett i punkten(a,b).
3. f är differentierbar i punkten (p,q).

Då har $z = w(s,t) = f(u(s,t), v(s,t))$ partiella derivator av ordning ett med avseende på s och t i punkten (a,b) och

$$\begin{aligned} w_1(a,b) &= f_1(p,q)u_1(a,b) + f_2(p,q)v_1(a,b) \\ w_2(a,b) &= f_1(p,q)u_2(a,b) + f_2(p,q)v_2(a,b) \end{aligned}$$

Bevis av Kedjeregeln

Eftersom de partiella derivatorna beräknas genom att alla variabler utom **en** hålls konstanta, räcker det att bevisa kedjeregeln i fallet $z = w(t) = f(u(t), v(t))$ då satsen säger att

$$w'(t) = f_1(p,q)u'(a) + f_2(p,q)v'(a)$$

där $p = u(a)$ och $q = v(a)$.

Differentialen

till en funktion $f(x,y)$ är funktionen av fyra variabler:

$$df(x,y,dx,dy) = f_1(x,y)dx + f_2(x,y)dy$$

Differentialen i punkten (a,b) kan ses som en funktion av två variabler:

$$df(a,b,h,k) = f_1(a,b)h + f_2(a,b)k$$

Funktionen f är differentierbar i (a,b) om och endast om

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{(f(a+h,b+k)-f(a,b))-df(a,b,h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

$df(x,y,dx,dy)$ är då en bra approximation till den verkliga förändringen $\Delta f = f(x+dx, y+dy) - f(x,y)$.

En funktion $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ges av m funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}$
$\mathbf{f} = (f_1,\ f_2,\ \cdots,\ f_m)$
Om $\mathbf{x} = (x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$ och $\mathbf{y} = (y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_m)$ där

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)\\ y_2 &= f_2(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)\\ &\vdots\\ y_m &= f_m(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)\end{aligned}$$

så kan vi skriva $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$.

Jacobimatrisen

De partiella derivatorna till $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ kan samlas i en matris

$$D\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \frac{\partial y_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Den **linjära avbildning** som har Jacobimatrisen, i en viss punkt, som avbildningsmatris kallas funktionens derivata i den punkten.

Kedjeregeln

$$D(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})(\mathbf{x}) = D\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) \cdot D\mathbf{f}(\mathbf{x})$$

Differentialen

$$d\mathbf{y} = D\mathbf{f}(\mathbf{x})d\mathbf{x}$$