TMA043 Flervariabelanalys E2, ht 09
Vecko–PM läsvecka 5

Adams: Kapitel 15

Innehåll:

Vektorfält, konservativa vektorfält, kurvintegraler, ytor, ytintegraler, flödesintegraler

Lärmål:

För att bli godkänd på kursen skall du kunna:

Adams	Mål
15.1	skissa ett vektorfält i planet, skissa fältlinjer till det och redogöra för sambandet mellan vektorfält och fältlinjer.
15.2	definiera begreppet *konservativt vektorfält i ett område* och beräkna *potential* till ett konservativt fält.
15.2	känna till nödvändiga villkor för att ett vektorfält skall vara konservativt (sid 813) och med hjälp av dessa kunna visa att ett givet vektorfält inte är konservativt.
15.2	förklara sambandet mellan nivåkurvor till potential och fältlinjerna till ett konservativt vektorfält.
15.3	definiera begreppet *kurvintegral av en funktion* och beräkna sådana integraler genom parametrisering av kurvan.
15.4	definiera begreppet *kurvintegral av ett vektorfält* och beräkna sådana integraler genom parametrisering av kurvan.
15.4	tillämpa satsen om kurvintegralers oberoende av integrationsvägen.
15.5	definiera begreppet *ytintegral av en funktion över en yta* och beräkna sådana integraler då ytan är en parametriserad yta eller funktionsyta.
15.6	definiera begreppet *flödesintegral (flöde av ett vektorfält genom en orienterad yta)* och beräkna sådana integraler då ytan är en parametriserad yta eller funktionsyta.
15.3-6	tillämpa kurv- och ytintegral för att bestämma t.ex. längd, arbete, area, massa, masscentrum laddning och flöde (se t.ex. övn 15.3.9, 15.4.12, 15.5.17, 15.5.20, 15.5.23, 15.6.9, 15.6.11, 15.CR.7).

För överbetyg skall du också kunna:

Adams	Mål
15.1	bestämma fältlinjer till vektorfält i planet.
15.4	definiera begreppen *område, sammanhängande område* och *enkelt samanhängande område.*
15.4	formulera satsen om kurvintegralers oberoende av integrationsvägen och bevisa att om vektorfältet är konservativt så är kurvintegralen oberoende av integrationsvägen.
15.5	beräkna ytintegral av en funktion över en nivåyta (se t.ex. 15.5.4).
15.6	beräkna flödesintegral över en nivåyta (se t.ex. 15.6.2).
15.3-6	motivera definitionerna av begreppen kurvintegral av funktion/vektorfält, ytintegral av en funktion och flödesintegral (till exempel genom att ge exempel på tillämpning och förklaring av varför integraltypen kan utnyttjas i exemplet).

Rekommenderade uppgifter

Avsnitt	Godkäntnivå Instuderingsuppgifter	Godkäntnivå Träningsuppgifter	Överbetygsnivå
15.1	3, 6 =(rita fältet, fältlinjer och nivåkurvor till $f(x, y) = x^2 - y$ i samma fig.)		
15.2	1, 3, 5	9	
15.3	2, 3, 7	9	
15.4	1, 3, 4, 5, 14,	7, 9, 15, 17, CR.7	21, 22, 23
15.5	3, 7, 13	9, 15, 17, 20, 23	4
15.6	1, 5, 9	11	2, 15, 17
M3	3.1.1, 3.2.1, 3.3.1	3.2.2, 3.3.2,	3.1.2, 3.3.3

Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Nyttig träning för alla, problemtypen ges endast på tentans överbetygsdel.

SF 1 Om vektorfältet $\mathbf{F}$ är kontinuerligt i ett område D så finns det en potentialfunktion Φ till $\mathbf{F}$ på D

SF 2 $D : 1 < x^2 + y^2 + z^2 < 2$ är ett enkelt sammanhängande område i rummet.

SF 3 Eftersom $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x2+y2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-x}{x2+y2}\right)$ så är vektorfältet $\mathbf{F}(x, y) = \frac{y}{x2+y2}\mathbf{i} - \frac{x}{x2+y2}\mathbf{j}$ konservativt och därmed är $\oint_{\mathcal{C}} \frac{y}{x2+y2}dx - \frac{x}{x2+y2}dy = 0$ för alla slutna kurvor $\mathcal{C}$ i planet

SF 4 Vektorfältet $\mathbf{F}(x, y) = \frac{x}{x2+y2}\mathbf{i} + \frac{y}{x2+y2}\mathbf{j}$ är konservativt i varje område som inte innehåller origo.

SF 5 Om kurvan $\mathcal{C}$ ges av $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $a \xrightarrow{t} b$, och vektorfältet $\mathbf{F}(x, y, z)$ har en potentialfunktion $\Phi(x, y, z)$ i hela $\mathbb{R}^3$ så är $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot d\mathbf{r} = \Phi(\mathbf{r}(b)) - \Phi(\mathbf{r}(a))$

SF 6 Antag att $\mathcal{S}$ är en sluten nivåyta $G(x, y, z) = 0$, där G har kontinuerliga partiella derivator, och att $\mathbf{F}$ är ett vektorfält sådant att $\mathbf{F}(x, y, z) \cdot \nabla G(x, y, z) \neq 0$ för alla $(x, y, z) \in \mathcal{S}$. Då är även det totala flödet av vektorfältet genom ytan $\mathcal{S}$ nollskilt.

SF 7 Masscentrum för en yta ("skal") är alltid en punkt på ytan.

SF 8 Ytintegralen $\iint_{\mathcal{S}} f(x, y, z)dS$ är positiv om $f(x, y, z) > 0$ för alla $(x, y, z) \in \mathcal{S}$