MATEMATIK **Hjälpmedel: bifogat formelblad, ordlistan från kurswebbsidan, ej räknedosa**
Chalmers tekniska högskola Datum: 091024 kl. 8.30–12.30
Tentamen Telefonvakt: Fredrik Lindgren
Telefon: 0703 088 304

TMA043 Flervariabelanalys E2

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.
För godkänt på tentan krävs 25 poäng på tentamens första del (godkäntdelen) Bonuspoäng från duggor 09/10 räknas med, men maximal poäng på denna del är 32. För godkänt på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens två delar.
Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan, efter detta sker granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. **Lösgör bladet och lämna in det som blad 1 tillsammans med övriga lösningar.** (14p)

Till följande uppgifter skall fullständiga lösningar inlämnas. **Endast svar ger inga poäng**. Motivera och förklara så väl du kan.

2. Bestäm största och minsta värde av funktionen $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x$ på cirkelskivan $x^2 + y^2 \leq 1$. (6p)

3. D är den stympade konen, som begränsas av den koniska ytan $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ och planen $z = 1$ samt $z = 4$. (6p)

Beräkna massan av kroppen D och masscentrum (se formelbladet) till D då densiteten i punkten (x, y, z) är $\delta(x, y, z) = z^{-2}$

4. En partikel rör sig i xy-planet utefter kurvan $\mathcal{C}$ under påverkan av kraftfältet $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$. Kurvan $\mathcal{C}$ går från $(1, 0)$ till $(1, -2\pi)$ och ges av

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t + t \sin t)\mathbf{i} + (\sin t - t \cos t)\mathbf{j}, \quad 0 \xrightarrow{t} 2\pi.$$

(a) Är $\mathbf{F}$ ett konservativt vektorfält i xy-planet? (motivera ditt svar!). (1p)

(b) Beräkna arbetet som kraftfältet $\mathbf{F}$ utför på partikeln då den rör sig utefter kurvan $\mathcal{C}$. (3p)

(c) Beräkna kurvintegralen $\int_{\mathcal{C}} (x^2 + y^2)\, ds$. (2p)

Överbetygsdelen finns på baksidan av detta blad

Del 2: Överbetygsdelen

Endast om man ligger enstaka poäng från godkänt och presterat riktigt bra på någon av följande uppgifter kan poäng på denna del räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

5. Låt $\mathcal{C}$ vara randkurvan till paraboloiden $z = x^2 + y^2,\ 0 \le z \le 4$ orienterad moturs sett uppifrån (t.ex. från punkten $(0, 0, 8)$). Använd Stokes sats för att beräkna kurvintegralen $\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$ då $\mathbf{F} = (y^2 + y)z\mathbf{i} + (2y - 1)xz\mathbf{j} + xy^2\mathbf{k}$. (6p)

6. Bestäm de punkter på skärningskurvan mellan konen $z^2 = x^2 + y^2$ och planet $z = x + y + 2$ som ligger närmast origo. Bestäm också de som ligger längst ifrån origo. (6p)

7. Definiera begreppen gradient och riktningsderivata för en funktion av två variabler. Bevisa sedan dels att $D_{\mathbf{u}} f(a, b) = \mathbf{u} \bullet \nabla f(a, b)$ och dels att i punkten (a, b) växer $f(x, y)$ snabbast i riktningen $\nabla f(a, b)$. (6p)

Lycka till!
Carl-Henrik F

Anonym kod	TMA043 Flervariabelanalys E2 091024	sid.nummer 1	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats(endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Bestäm en ekvation för tangentplanet i punkten $(1, 0, -1)$ till nivåytan $xe^y + x^2z - yz^2 = 0$. (2p)

Lösning:

Svar: ....

(b) Förklara vad som menas med att en funktion $f(x, y)$ är kontinuerlig i punkten (a, b). (3p)

Funktionen f ges av $f(x,y) = \begin{cases} 2x^2 + y & \text{då} \quad (x,y) \neq (2,1) \\ 1 & \text{då} \quad (x,y) = (2,1) \end{cases}$.

Är f kontinuerlig i punkten $(2, 1)$? Motivera ditt svar.

Förklaring, svar och motivering:

....

(c) Bestäm taylorpolynomet av grad 2 till $f(x, y) = \sin(x + y) + \cos(x - y)$ i punkten $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$. (3p)
Utnyttja detta för att beräkna ett närmevärde till $f(\frac{\pi}{4} + 0.1, \frac{\pi}{4} - 0.2)$

Lösning:

Svar: ....

(d) Beräkna flödet av $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$ ut ur kuben $0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1$. (3p)

Lösning:

Svar: ....

(e) Skissa området $D:\ x^2 + y^2 \leq 4,\ |x| \leq y$ och beräkna dubbelintegralen $\iint_D y\,dxdy$ (3p)
(polära koordinater underlättar).

Lösning:

Svar: ....

Formelblad för TMA043 och MVE085 09/10

Trigonometri.

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}$$

Integralkatalog

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad , \quad a \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{cos^2 x} dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{sin^2 x} dx = -\cot x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \ , \ 0 < a \neq 1$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C \ , \ a \neq 0$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}} dx = \arcsin\frac{x}{\sqrt{a}} + C \ , \ a > 0$$

$$\int \sqrt{a-x^2} dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a-x^2} + \frac{a}{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{a}} + C \ , \ a > 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln|x+\sqrt{x^2+a}| + C \ , \ a \neq 0$$

$$\int \sqrt{x^2+a} dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+a} + a\ln|x+\sqrt{x^2+a}|) + C$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \alpha \\ k \end{pmatrix} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots \quad , \quad |x| < 1 \quad , \quad \begin{pmatrix} \alpha \\ k \end{pmatrix} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k(k-1)\dots 1}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad , \quad -1 < x \leq 1$$

$$\arctan x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{2k-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad , \quad |x| \leq 1$$

Övrigt

Masscentrum (x_T, y_T, z_T) för Ω ges av $x_T = \dfrac{\iiint_\Omega x\rho(x,y,z)\,dxdydz}{\iiint_\Omega \rho(x,y,z)\,dxdydz}$, analogt för y_T, z_T.

$\rho(x,y,z)$ är densiteten.