Deltentamen
godkändelen, del 1

TMA043 Flervariabelanalys E2

2011-09-17 kl. 8:30-11:30

Examinator: Johan Jonasson , Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Fredrik Lindgren, telefon: 0703 088 304

Hjälpmedel: bifogat formelblad, ordlistan från kurswebbsidan, ej räknedosa

Tentamen på kursen består av tre delar; del 1 och del 2 av godkäntdelen samt överbetygsdelen. Denna deltenta täcker endast den första av dessa tre delar. För godkänt på tentamen som helhet krävs antingen 25 poäng på godkäntdelens två delar sammanlagt, eller att båda delarna är godkända var för sig. För godkänt på del 1 krävs minst 10 poäng, för godkänt på del 2 krävs 13 poäng. Erhållen poäng på någon av delarna får ersätta poäng på motsvarande del på senare tentamen tills kursen ges nästa läsår. För godkänt på kursen skall också Matlab-momentet vara godkänt. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens alla delar.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas i samband med undervisningen senast tre veckor efter tentamenstillfället.

Godkäntdelen, del 1

se uppgift 1:abc och 2 på nästa blad

Lycka till!
Johan Jonasson

Formelblad för TMA043 och MVE085, 10/11

Trigonometri.

$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$

$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$

$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$

$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$

$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$

$\tan(x+y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}$

Integralkatalog

$$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad , \quad a \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{cos^2 x}\,dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{sin^2 x}\,dx = -\cot x + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \;,\; 0 < a \neq 1$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C \;,\; a \neq 0$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{\sqrt{a}} + C \;,\; a > 0$$

$$\int \sqrt{a-x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a-x^2} + \frac{a}{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{a}} + C \;,\; a > 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \ln|x+\sqrt{x^2+a}| + C \;,\; a \neq 0$$

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+a} + a\ln|x+\sqrt{x^2+a}|) + C$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots \quad , \quad |x| < 1 \quad , \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k(k-1)\dots 1}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad , \quad -1 < x \leq 1$$

$$\arctan x = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{2k-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad , \quad |x| \leq 1$$

Övrigt

Masscentrum (x_T, y_T, z_T) för Ω ges av $x_T = \frac{\iiint_\Omega x\rho(x,y,z)\,dxdydz}{\iiint_\Omega \rho(x,y,z)\,dxdydz}$, analogt för y_T, z_T.

$\rho(x,y,z)$ är densiteten.

Anonym kod	TMA043 Flervariabelanalys E2 2011-09-17	sid.nummer	Poäng

Godkäntdelen: del 1

1. Till nedanstående deluppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Antag att en partikels position i rummet vid en tidpunkt t ges av $\mathbf{r} = t^2\mathbf{i} + t^3\mathbf{j} - 2t\mathbf{k}$. Ange de tidpunkter för vilka partikeln passerar punkterna $P_1 = (1, -1, 2)$ respektive $P_2 = (4, 8, -4)$ och beräkna partikelns hastighet i dessa punkter. Ange också en integral vars värde ger det avstånd som partikeln förflyttas då den rör sig från P_1 till P_2. (obs! integralen behöver inte beräknas) (3p)

Lösning/Svar: Vi ser direkt att partikeln passerar P_1 och P_2 vid tidpunkterna $t = -1$ resp. $t = 2$. Vidare är $\mathbf{r}'(t) = 2t\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ så hastigheten i dessa punkter är $\mathbf{r}'(-1) = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ resp. $\mathbf{r}'(2) = 4\mathbf{i} + 12\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$. Avståndet som partikeln förflyttar sig dvs. kurvlängden mellan punkterna är $\int_{-1}^{2} |\mathbf{r}'(t)|\,dt = \int_{-1}^{2} \sqrt{(2t)^2 + (3t^2)^2 + (-2)^2}\,dt = \int_{-1}^{2} \sqrt{4t^2 + 9t^4 + 4}\,dt$

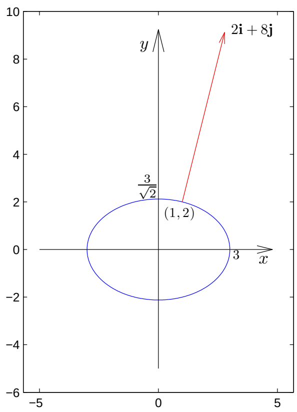
(b) Bestäm differentialen df av funktionen $f(x, y) = e^{xy-6}$ i punkten $(2, 3)$ och använd differentialen för att beräkna $f(2.1, 2.8)$ approximativt. (3p)

Lösning: Differentialen av f är $df = f_1(x, y)dx + f_2(x, y)dy = ye^{xy-6}dx + xe^{xy-6}dy$ och speciellt i punkten $(2, 3)$ är $df = 3dx + 2dy$. Med $dx = 0.1$ och $dy = -0.2$ får vi att;

$$f(2.1, 2.8) = f(2, 3) + \Delta f \approx f(2, 3) + df = 1 + 3 \cdot 0.1 + 2 \cdot (-0.2) = 0.9$$

Svar: $df = 3dx + 2dy$ och $f(2.1, 2.8) \approx 0.9$

(c) Bestäm gradienten av funktionen $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ i punkten $(1, 2)$. Skissa också nivåkurvan till $f(x, y)$ genom $(1, 2)$ och rita ut gradientvektorn i samma figur. (3p)



Lösning & skiss: Gradienten av f är $\nabla f(x, y) = f_1(x, y)\mathbf{i} + f_2(x, y)\mathbf{j} = 2x\mathbf{i} + 4y\mathbf{j}$ och speciellt i punkten $(1, 2)$ är $\nabla f = 2\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$. Eftersom $f(1, 2) = 9$ så är nivåkurvan till f genom $(1, 2)$ ellipsen $x^2 + 2y^2 = 9$. Figuren här till höger visar denna nivåkurva och gradientvektorn $2\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$

Till följande uppgift skall fullständig lösning redovisas på separat skrivpapper. Motivera och förklara så väl du kan.

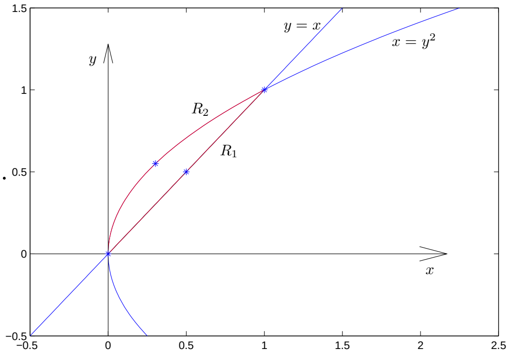
2. Bestäm det största värdet av $f(x, y) = x^2 + 2y - 4xy^2$ på det område som begränsas av parabeln $x = y^2$ och linjen $y = x$.

Lösning: Eftersom funktionen f saknar singulariteter så måste extremvärdena antas antingen i kritiska punkter i det inre av området eller i punkter på randen av området. Vi börjar med att bestämma ev. kritiska punkter till f. Vi har;

$$\nabla f(x, y) = (2x - 4y^2)\mathbf{i} + (2 - 8xy)\mathbf{j} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 2y^2 \\ 1 = 8y^3 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad (x, y) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

Den kritiska punkten $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ligger på randen av området så det finns inga kritiska punkter i det inre av området. Vi undersöker nu de två randbitarna;

$$R_1 : y = x, 0 \le x \le 1 \quad \text{och} \quad R_2 : x = y^2, 0 \le y \le 1.$$



$R_1 : g_1(x) = f(x, x) = x^2 + 2x - 4x^3$. Vi har $g_1'(x) = 2x + 2 - 12x^2 = 0 \;\Leftrightarrow$ $x = \frac{1}{12} \pm \sqrt{(\frac{1}{12})^2 + \frac{1}{6}} = \frac{1 \pm 5}{12} \;\Leftrightarrow\; x = \frac{1}{2}$ eller $x = -\frac{1}{3}$. Av dessa kritiska punkter till g_1 är endast $x = \frac{1}{2}$ intressant (ty den ligger i intervallet $0 \le x \le 1$). Vi har $g_1(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} + 1 - \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$ (obs! $g_1(\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$).

$R_2 : g_2(x) = f(y^2, y) = y^4 + 2y - 4y^4 = 2y - 3y^4$. Vi har $g_2'(x) = 2 - 12y^3 = 0 \Leftrightarrow$ $y = (\frac{1}{6})^{1/3}$. Denna kritiska punkt till g_2 ligger i intervallet $0 \le y \le 1$ och $g_2((\frac{1}{6})^{1/3}) = 2(\frac{1}{6})^{1/3} - 3(\frac{1}{6})^{4/3} = \frac{3}{2}(\frac{1}{6})^{1/3}$.

Vi måste också kontrollera funktionsvärdena i ”hörnpunkterna”$(0, 0)$ och $(1, 1)$ av området. Vi har $f(0, 0) = 0$ och $f(1, 1) = -1$. Dessa värden skall slutligen jämföras med ovan erhållna ”kandidater” dvs $f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$ och $f((\frac{1}{6})^{2/3}, (\frac{1}{6})^{1/3}) = \frac{3}{2}(\frac{1}{6})^{1/3}$. Av dessa fyra värden är $\frac{3}{2}(\frac{1}{6})^{1/3}$ störst ty $\frac{3}{2}(\frac{1}{6})^{1/3} > \frac{3}{2}(\frac{1}{8})^{1/3} = \frac{3}{4}$

Svar: Funktionens största värde på det angivna området är $\frac{3}{2}(\frac{1}{6})^{1/3}$