Tentamen
TMA043 Flervariabelanalys E2

2011-10-20 kl. 8.30–12.30

Examinator: Johan Jonasson, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Richard Lärkäng , telefon: 0703 088 304

Hjälpmedel: bifogat formelblad, ordlistan från kurswebbsidan, ej räknedosa

För godkänt på tentan krävs antingen 25 poäng på godkäntdelens två delar sammanlagt, eller att båda delarna är godkända var för sig. För godkänt på del 1 krävs minst 10 poäng, för godkänt på del 2 krävs 13 poäng. Erhållen poäng på någon av delarna får ersätta poäng på motsvarande del på senare tentamen tills kursen ges nästa läsår. För godkänt på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens alla delar.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan, efter detta sker granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

Godkäntdelen, del 1

Uppgift 1 och 2 se nästa blad

Godkäntdelen, del 2

Uppgift 3, 4 och 5 se blad 3

Överbetygsdelen

Endast om man ligger enstaka poäng från godkänt och presterat riktigt bra på någon av följande uppgifter kan poäng på denna del räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

6. Beräkna flödet av $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 3z\mathbf{k}$ ut ur den kropp som begränsas av paraboloiden $2z = x^2 + y^2$ och planet $z = 1 + x + y$. (6p)

Lösning: Enligt Gauss divergenssats ges utflödet ur den angivna kroppen, R, av $\iiint_R \nabla \bullet \mathbf{F} dV$. Eftersom $\nabla \bullet \mathbf{F} = 6$ blir utflödet $6vol(R)$. Kroppen R ges av $(x^2 + y^2)/2 \leq z \leq 1 + x + y$, vilken i xy-planet begränsas av kurvan som ges av $x + 2 + y^2 = 2(1 + x + y)$. Detta blir efter lite arbete och användande av kvadreringsregeln

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$$

dvs en cirkel av radie centrerad i (1,1). Låt D vara cirkelskivan som innesluts av denna cirkel. Vi har

$$6vol(R) = 6\iint_D (1 + x + y - \frac{x^2+y^2}{2})dxdy = 3\iint_D (4 - (x-1)^2 - (y-1)^2)dxdy$$

$$= 3\int_0^{2\pi}\int_0^2 r(4 - r^2)drd\theta = 24\pi.$$

7. Låt $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$. Visa att $\lim\limits_{x\to 0} f(x,kx)$ existerar och är lika för alla reella tal k men att $f(x,y)$ trots det saknar gränsvärde i origo. (6p)

Lösning. Vi har att

$$f(x,kx) = \frac{kx^3}{x^4+k^2x^2} = \frac{kx}{x^2+k^2}$$

som går mot $0/k^2 = 0$. Å andra sidan är $f(x,x^2) = 1/2$.

8. Låt $g(x,y) = 0$ beskriva en glatt kurva och $f(x,y)$ en glatt funktion. Antag vidare att (x_0,y_0) är en extrempunkt till $f(x,y)$ under bivillkoret $g(x,y) = 0$. Förklara varför det måste finnas ett tal λ_0 sådant att (x_0,y_0,λ_0) är en kritisk punkt till Lagrangefunktionen $L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$. (6p)

Lösning. Eftersom (x_0,y_0) är en extrempunkt till $f(x,y)$ under $g(x,y) = 0$, har vi att $D_vf(x_0,y_0) = 0$ för v i kurvans riktning. Men

$$D_vf(x_0,y_0) = v\bullet\nabla f(x_0,y_0) = 0$$

betyder ju att $\nabla f(x_0,y_0)$ är vinkelrät mot v, dvs parallell med $\nabla g(x_0,y_0)$, dvs det finns ett tal λ_0 sådant att $\nabla f(x_0,y_0) + \lambda_0\nabla g(x_0,y_0) = 0$. Detta är just det vi ville visa.

Lycka till!
Johan Jonasson

Anonym kod	TMA043 Flervariabelanalys E2 2011-10-20	sid.nummer	Poäng

Godkäntdelen: del 1

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats(endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Bestäm och skissa definitionsmängden till funktionen $f(x,y) = \ln(3 - xy)$ och visa att origo är en kritisk punkt till $f(x,y)$. (3p)

Lösning: Definitionsmängden ges av $\{(x,y) : xy < 3\}$, dvs området mellan de två delarna (svarande mot $x < 0$ respektive $x > 0$) av grafen $y = 3/x$. Att origo är en kritisk punkt ser vi av att $f_1 = -y/(3-xy)$ och $f_2 = -x/(3-xy)$ som båda är 0 i origo.

(b) Bestäm Taylorpolynomet av grad 2 till $f(x,y) = e^{x-2y}$ i punkten $(2,1)$. (3p)

Lösning: Vi har $f = f_1 = f_{11} = e^{x-2y}$, $f_2 = f_{12} = -2e^{x-2y}$ och $f_{22} = 4e^{x-2y}$. I punkten (2,1) blir dessa 1, -2, respektive 4, varför Taylorpolynomet blir

$$P_2 = 1 + h - 2k + \frac{1}{2}(h^2 - 2hk + 4k^2)$$

där $h = x - 2$ och $k = y - 1$. Alternativt kan man alltså skriva detta som

$$P_2 = 1 + (x-2) - 2(y-1) + \frac{1}{2}\Big((x-2)^2 - 2(x-2)(y-1) + 4(y-1)^2\Big).$$

(c) Bestäm längden av kurvan $\mathbf{r} = \frac{1}{3}t^3\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$ mellan punkterna $(0,0,0)$ och $(9,9,6)$. (3p)

Lösning: Längden är

$$\int_0^3 |\mathbf{r}'(t)|dt = \int_0^3 \sqrt{t^4 + 4t^2 + 4t}\,dt = \int_0^3 (t^2+2)dt = 15.$$

Till följande uppgift skall fullständig lösning redovisas på separat skrivpapper. Motivera och förklara så väl du kan.

2. Använd Lagrange multiplikatormetod för att bestämma det största värde som funktionen $f(x,y) = x^2y$ antar på cirkeln med centrum i origo och radie 3. (5p)

Lösning: Vi ska maximera x^2y under bivillkoret $x^2 + y^2 = 9$. Lagrangefunktionen blir $L(x,y,\lambda) = x^2y + \lambda(x^2 + y^2 - 9)$. Sätt gradienten till noll och få

$$\begin{cases} 2xy + 2x\lambda &= 0 \\ x^2 + 2y\lambda &= 0 \\ x^2 + y^2 - 9 &= 0 \end{cases}$$

Uttryck 1 leder till $x = 0$, som ger $\lambda = 0$ och $y = \pm 3$, eller $x^2 = 2y^2$, som i sin tur ger $y^2 = 3$ och $x^2 = 6$, dvs $(x,y) = (\pm\sqrt{6}, \pm\sqrt{3})$. Prövning ger att största värdet erhålls då $x = \pm\sqrt{6}$ och $y = \sqrt{3}$ och blir $6\sqrt{3}$.

Anonym kod	TMA043 Flervariabelanalys E2 2011-10-20	sid.nummer	Poäng

Godkäntdelen: del 2

3. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats(endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Beräkna dubbelintegralen $\iint_D y\,dxdy$ då D är det område i xy-planet som begränsas av parabeln $y = x^2$ och linjen $y = 1$. (3p)

Lösning:

$$\iint_D y\,dxdy = \int_{-1}^{1}\Big(\int_{x^2}^{1} y\,dy\Big)dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(1-x^4)dx$$
$$= \frac{1}{2}\Big[x - \frac{1}{5}x^5\Big]_{-1}^{1} = \frac{4}{5}.$$

(b) Beräkna massan av den kropp K som ges av $1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 4, z \ge 0$ och som består av ett material med densiteten $\delta(x, y, z) = z$ (Tips: sfärisk substitution) (3p)

Lösning: Kroppen K är den övre halvan av klotet av radie 2 centrerat i origo minus den övre halvan av klotet av radie 1. Massan är

$$\iiint_K z\,dxdydz = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_1^2 \rho\cos\phi\rho^2\sin\phi\,d\rho d\phi d\theta$$

$$= 2\pi\int_0^{\pi/2}\cos\phi\sin\phi\,d\phi\int_1^2\rho^3 d\rho = 2\pi\Big[\frac{1}{2}\sin^2\phi\Big]_0^{\pi/2}\Big[\frac{1}{4}\rho^4\Big]_1^2 = \frac{15\pi}{4}.$$

Till följande uppgifter skall fullständiga lösningar redovisas på separata skrivpapper. Motivera och förklara så väl du kan.

4. Betrakta fältet $\mathbf{F} = x^2y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ och låt $\mathcal{C}$ vara randkurvan till rektangeln med hörn i $(0, 0), (2, 0), (2, 1), (0, 1)$ orienterad moturs. Beräkna kurvintegralen $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}$ genom att (6p)

(a) parametrisera randbitarna och utgå från definitionen av kurvintegral.

Lösning: Med början på rektangelns nedre sida parametriseras de fyra sidorna av $\mathbf{r}(t) = (2t, 0)$, $\mathbf{r}(t) = (2, t)$, $\mathbf{r}(t) = (2 - 2t, 1)$ och $\mathbf{r}(t) = (0, 1 - t)$ där i samtliga fall $0 \le t \le 1$. Vi har

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}} x^2y\,dx + x\,dy$$

som är noll på sida 1 och 4, $\int_0^1 2dt = 2$ på sida 2 och $-2\int_0^1(2 - 2t)^2dt = -8/3$ på sida 3. Alltså är

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r} = 2 - \frac{8}{3} = -\frac{2}{3}.$$

(b) använda Greens sats.

Lösning:

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r} = \int_0^1\int_0^2\Big(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\Big)dxdy = \int_0^1\int_0^2(1-x^2)dxdy$$
$$= \Big[x - \frac{1}{3}x^3\Big]_0^2 = -\frac{2}{3}.$$

5. Betrakta $\mathbf{F} = 2y\mathbf{i} + 2x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ och låt S vara den del av funktionsytan $z = xy$ som ligger inuti cylindern $x^2 + y^2 \le 4$ (6p)

(a) Bestäm en parametrisering av S

Lösning: $\mathbf{r}(u, v) = (u, v, uv)$, $u^2 + v^2 \le 4$.

(b) Beräkna flödet av $\mathbf{F}$ upp genom ytan S.

Lösning: Låt $\mathcal{S}$ vara funktionsytan och låt $D = \{(u, v) : u^2 + v^2 \le 4\}$. Vi söker $\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{N}}\, dS$. Det gäller att

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{N}}\, dS = \pm \iint_D \mathbf{F} \bullet \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) du dv = {}_{(}\overset{\pm}{-}{}_{)} \iint_D (2v, 2u, uv) \bullet (-v, -u, 1)\, du dv$$

$$= \iint_D (-2u^2 - 2v^2 + uv) du dv = -\iint_D (2u^2 + 2v^2) du dv = -2 \int_0^{2\pi} \int_0^2 r^3\, dr d\theta$$

$$= -4\pi \left[\frac{1}{4} r^4 \right]_0^2 = -16\pi,$$

där den fjärde likheten följer av symmetri.