Lösningsförslag till tentamen TMA043 Flervariabelanalys E2

2012-09-01 kl. 8.30–12.30

Examinator: Johan Jonasson , Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Oskar Hamlet , telefon: 0703 088 304

Hjälpmedel: bifogat formelblad, ordlistan från kurswebbsidan, ej räknedosa

För godkänt på tentan krävs antingen 25 poäng på godkäntdelens två delar sammanlagt, eller att båda delarna är godkända var för sig. För godkänt på del 1 krävs minst 10 poäng, för godkänt på del 2 krävs 13 poäng. Erhållen poäng på någon av delarna får ersätta poäng på motsvarande del på senare tentamen tills kursen ges nästa läsår. För godkänt på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens alla delar.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan, efter detta sker granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

Godkäntdelen, del 1

Uppgift 1 och 2 se nästa blad

Godkäntdelen, del 2

Uppgift 3, 4 och 5 se blad 3

Överbetygsdelen

Endast om man ligger enstaka poäng från godkänt och presterat riktigt bra på någon av följande uppgifter kan poäng på denna del räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

6. Avgör om följande två gränsvärden existerar eller ej, och bestäm i förekommande fall deras värde (tydlig motivering krävs!) (6p)

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^4}$ (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

(a) **Lösning** Gränsvärdet existerar ej, ty längs med linjen $y = 0$ (dvs. x-axeln) har vi;

$$\frac{x^2}{x^2+y^4} = \frac{x^2}{x^2} = 1\ , \quad \text{för alla } x \neq 0$$

medan vi längs linjen $x = 0$ (dvs. y-axeln) har;

$$\frac{x^2}{x^2+y^4} = 0\ , \quad \text{för alla } y \neq 0$$

speciellt överenstämmer inte gränsvärdena av dessa uttryck då vi närmar oss origo.

(b) **Lösning** Gränsvärdet existerar och $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$, ty övergång till polära koordinater $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ ger $\displaystyle\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{r} = r\cos\theta\sin\theta \to 0\ ,$ då $r \to 0$

7. Visa att ekvationen $x + 2y + z + e^z = 1$ implicit definierar en funktion $z = f(x, y)$ i en omgivning av origo och använd implicit derivering för att bestämma Maclaurinpolynomet för $f(x, y)$ av grad 2 (dvs. Taylorpolynomet av grad 2 kring punkten $(0, 0)$). (6p)

Lösning: Sätt $F(x, y, z) = x + 2y + z + e^z - 1$. Vi har $F_3(x, y, z) = 1 + e^z$ och speciellt är $F_3(0, 0, 0) = 2 \neq 0$, så det följer av Implicita funktionssatsen att ekvationen $F(x, y, z) = 0$ implicit definierar en funktion $z = f(x, y)$ i en omgivning av punkten $(0, 0, 0)$. Vidare är;

$$x + 2y + f(x, y) + e^{f(x,y)} = 1 \quad , \quad \text{för alla } (x, y) \text{ i en omgivning av } (0, 0)$$

Deriverar vi båda led m.a.p. x resp. y så får vi

$$1 + (1 + e^{f(x,y)})f_1(x, y) = 0 \qquad \text{och} \qquad 2 + (1 + e^{f(x,y)})f_2(x, y) = 0$$

Speciellt får vi att; $f_1(0, 0) = -1/2$ och $f_2(0, 0) = -1$. Ytterligare derivering ger att;

$$\begin{aligned}
&e^{f(x,y)}(f_1(x, y))^2 + (1 + e^{f(x,y)})f_{11}(x, y) = 0\\
&e^{f(x,y)}f_1(x, y)f_2(x, y) + (1 + e^{f(x,y)})f_{12}(x, y) = 0\\
&e^{f(x,y)}(f_2(x, y))^2 + (1 + e^{f(x,y)})f_{22}(x, y) = 0
\end{aligned}$$

och speciellt får vi att $f_{11}(0, 0) = -1/8, f_{12}(0, 0) = -1/4, f_{22}(0, 0) = -1/2$

Taylorpolynomet av andra ordningen till $f(x, y)$ i punkten $(0, 0)$ är därför

$$p_2(x, y) = f(0, 0) + f_1(0, 0)x + f_2(0, 0)y + \frac{1}{2}\left(f_{11}(0, 0)x^2 + 2f_{12}(0, 0)xy + f_{22}(0, 0)y^2\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}x - y - \frac{1}{16}x^2 - \frac{1}{4}xy - \frac{1}{4}y^2$$

Svar: $p_2(x, y) = -\frac{1}{2}x - y - \frac{1}{16}x^2 - \frac{1}{4}xy - \frac{1}{4}y^2$

8. Formulera och bevisa medelvärdessatsen för dubbelintegraler. (6p)

Lösning: se avsnitt 14.3 i Calculus.

Anonym kod	TMA043 Flervariabelanalys E2 2012-09-01	sid.nummer	Poäng

Godkäntdelen: del 1

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Låt D vara det område i $\mathbb{R}^2$ som består av punkter (x, y) sådana att $0 < x^2 + y^2 \leq 2$. Förklara med hjälp av begreppet *omgivning* varför D varken är öppen eller sluten. (2p)

Svar: D är inte öppen ty varje omgivning till en punkt på randen $x^2 + y^2 = 2$ innehåller punkter som inte tillhör D. D är inte heller sluten ty dess komplement D^c är inte en öppen mängd p.g.a. att varje omgivning till origo innehåller punkter i D.

(b) Uttryck $\dfrac{d^2}{ds^2} f(s^2, s)$ i de partiella derivatorna av f. (3p)

Lösning:

$$\frac{d^2}{ds^2} f(s^2, s) = \frac{d}{ds}\left(\frac{d}{ds} f(s^2, s)\right) = \frac{d}{ds}\left(f_1(s^2, s)2s + f_2(s^2, s)\right) =$$

$$= f_{11}(s^2, s)4s^2 + f_{12}(s^2, s)2s + f_1(s^2, s)2 + f_{21}(s^2, s)2s + f_{22}(s^2, s)$$

Svar: $\dfrac{d^2}{ds^2} f(s^2, s) = 4s^2 f_{11}(s^2, s) + 4s f_{12}(s^2, s) + 2f_1(s^2, s) + f_{22}(s^2, s)$

(c) Bestäm ekvationer för tangentlinjen och normallinjen till nivåkurvan $x^3 - 3xy - 2y^3 = 0$ i punkten $(2, 1)$. (3p)

Lösning: Gradienten till $f(x, y) = x^3 - 3xy - 2y^3$ i punkten $(2, 1)$ är vinkelrät mot tangentlinjen. Vi har $\nabla f(x, y) = (3x^2 - 3y)\mathbf{i} + (-3x - 6y^2)\mathbf{j}$ och speciellt är $\nabla f(2, 1) = 9\mathbf{i} - 12\mathbf{j}$, så tangentlinjen beskrivs av ekvationen

$$9(x - 2) - 12(y - 1) = 0 \;\Leftrightarrow\; 3x - 4y = 2$$

Vektorn $12\mathbf{i} + 9\mathbf{j}$ är vinkelrät mot gradienten och därmed även mot normallinjen, vilket således kan beskrivas med ekvationen

$$12(x - 2) + 9(y - 1) = 0 \;\Leftrightarrow\; 4x + 3y = 11$$

Svar: Tangentlinjens ekvation: $3x - 4y = 2$, Normallinjens ekvation: $4x + 3y = 11$

Till följande uppgift skall fullständig lösning redovisas på separat skrivpapper. Motivera och förklara så väl du kan.

2. Bestäm största och minsta värde av funktion $f(x, y) = 2x^2 + y^2 - y$ på cirkelskivan $x^2 + y^2 \leq 1$. (6p)

Lösning: Det finns ett största och minsta värde eftersom funktionen är kontinuerlig och cirkelskivan är sluten och begränsad. Dessa extremvärden kan antas i punkter i det inre av skivan, i punkter där $\nabla f(a, b) = \mathbf{0}$, och/eller på randen av skivan.

Vi har $f_1(x, y) = 4x$ och $f_2(x, y) = 2y - 1$. Vi ser direkt att den enda kritiska punkten är $(0, \frac{1}{2})$ och att den ligger inuti cirkelskivan. Vidare är $f(0, \frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}$.

På randen är $x^2 = 1 - y^2$ och därmed $f(x, y) = g(y) = 2 - y^2 - y$, där $-1 \leq y \leq 1$. Vi har $g'(y) = -2y - 1 = 0$ då $y = -\frac{1}{2}$. Vidare är $g(-\frac{1}{2}) = \frac{9}{4}$, $g(-1) = 2$, $g(1) = 0$, så minsta funktonsvärdet på randen är alltså 0 och största är $\frac{9}{4}$.

Svar: Funktionens minsta värde på cirkelskivan är $-\frac{1}{4}$ och det största är $\frac{9}{4}$.

Anonym kod	TMA043 Flervariabelanalys E2 2012-09-01	sid.nummer	Poäng

Godkäntdelen: del 2

3. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Beräkna rotationen av $\mathbf{F} = xy^2\mathbf{i} + 2yz\mathbf{j} + xz^2\mathbf{k}$ och avgör om vektorfältet $\mathbf{F}$ är konservativt på $\mathbb{R}^3$. (3p)

Lösning:

$$\operatorname{curl}\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy^2 & 2yz & xz^2 \end{vmatrix} = -2y\mathbf{i} - z^2\mathbf{j} - 2xy\mathbf{k}$$

Vektorfältet är inte konservativt ty konservativa vektorfält är alltid virvelfria (se villkor i avsnitt 15.2 samt kommentar innan Sats 4 i avsnitt 16.2).

Svar: Vektorfältet är ej konservativt på $\mathbb{R}^3$ ty $\operatorname{curl}\mathbf{F} = -2y\mathbf{i} - z^2\mathbf{j} - 2xy\mathbf{k} \not\equiv 0$.

(b) Beräkna $\iint_D (x^2+y^2)\,dA$ då D är det område i första kvadranten där $x + y \le 1$.

Lösning:

$$\iint_D (x^2+y^2)\,dA = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (x^2+y^2)\,dy\right)\,dx =$$

$$= \int_0^1 \left[x^2y + \frac{1}{3}y^3\right]_0^{1-x} = \int_0^1 \left(x^2(1-x) + \frac{1}{3}(1-x)^3\right)\,dx =$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{12}(1-x)^4\right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$$

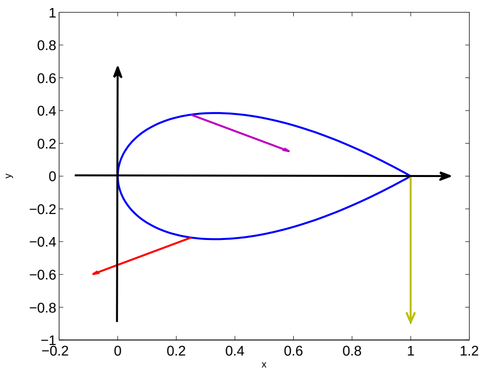
Svar: $\iint_D (x^2+y^2)\,dA = \frac{1}{6}$

Till följande uppgifter skall fullständiga lösningar redovisas på separata skrivpapper. Motivera och förklara så väl du kan.

4. Betrakta det plana vektorfältet $\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$ och låt $\mathcal{C}$ vara den slutna kurva i xy-planet som ges av parametriseringen $\mathbf{r} = t^2\mathbf{i} + t(1-t^2)\mathbf{j}$, $-1 \le t \le 1$.

(a) Illustrera hur vektorfältet varierar utefter kurvan $\mathcal{C}$ genom att skissa vektorfältspilar (som indikerar vektorfältets storlek och riktning) i lämligt valda punkter på kurvan t.ex. där $t = -1, -0.5, 0, 0.5, 1$. (2p)

Lösning:



(b) Beräkna kurvintegralen $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}} y dx - x dy.$ (3p)

Lösning:

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}} y dx - x dy = \int_{-1}^{1} \left(t(1-t^2)2t - t^2(1-3t^2)\right)\, dt =$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(t^2 + t^4\right)\, dt = \left[\frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3} + \frac{2}{5} = \frac{16}{15}$$

Svar: $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r} = \frac{16}{15}$

(c) Vad är arean av det område i planet som omsluts av kurvan $\mathcal{C}$? (1p)

Lösning: Eftersom $\mathcal{C}$ är negativt orienterad m.a.p. det område D som omslutes så är;

$$\text{Arean av } D = \frac{1}{2}\int_{-\mathcal{C}} x dy - y dx = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{C}} y dx - x dy$$

så från deluppgift (b) följer att;

Svar: Arean är $\dfrac{8}{15}$

5. Låt K vara den kropp som ges av $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2$ och $z \geq 1$.

(a) Parametrisera de ytor som begränsar kroppen K. (2p)

Lösning: Den övre delen av ytan som är en halvsfär $x^2 + y^2 + z^2 = 2$, $z \geq 1$ kan t.ex. parametriseras med;

$$\begin{cases} x = \sqrt{2}\sin\phi\cos\theta \\ y = \sqrt{2}\sin\phi\sin\theta \\ z = \sqrt{2}\cos\phi \end{cases} , \quad \begin{array}{l} 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4} \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{array}$$

eller

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = \sqrt{2 - r^2} \end{cases} , \quad \begin{array}{l} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{array}$$

eller

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = \sqrt{2 - u^2 - v^2} \end{cases} , \quad u^2 + v^2 \leq 1$$

eller på oändligt många andra sätt.
Den plana cirkelskiva som begränsar området nertill kan t.ex. parametriseras med;

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = 1 \end{cases} , \quad \begin{array}{l} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{array}$$

eller

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = 1 \end{cases} , \quad u^2 + v^2 \leq 1$$

(b) Beräkna flödet av hastighetsfältet $\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ ut ur kroppen K. (4p)

Lösning: Gauss's divergenssats ger att;

$$\text{Flödet ut ur } K = \iint_{\partial K} \mathbf{F}\bullet\hat{\mathbf{N}}\, dS = \iiint_K \operatorname{div}\mathbf{F}\, dV = \iiint_K 2z\, dV =$$

$$= \int_1^{\sqrt{2}} 2z \left(\iint_{x^2+y^2\leq 2-z^2} dxdy\right) dz = \int_1^{\sqrt{2}} 2z \left(\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\sqrt{2-z^2}} r\, dr\right) d\theta\right) dz =$$

$$= \pi\int_1^{\sqrt{2}} 2z(2 - z^2)\, dz = \pi\left[2z^2 - \frac{1}{2}z^4\right]_1^{\sqrt{2}} = \pi(4 - 2 - 2 + \frac{1}{2}) = \frac{\pi}{2}$$

Svar: Flödet är $\dfrac{\pi}{2}$ (volymsenheter per tidsenhet)