Kompletterande övningsuppgifter i flervariabelanalys

1. Bestäm en omgivning av punkten $(1, 2)$ som innehåller punkten $(1.05, 2.03)$ men som inte innehåller punkten $(1.1, 2)$. Skissa omgivningen tillsammans med alla de angivna punkterna.

2. Låt $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z < 0\}$ och låt $P = (x, y, z)$ vara en godtycklig punkt i Ω. Avgör för vilka ϵ som $B_\epsilon(P)$ helt ligger i området Ω.

3. Visa att varje omgivning av punkten $(1, 0, 0, 1)$ innehåller minst en punkt från mängden $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x > z\}$

4. Avgör om punkten $(1, 1, 1)$ är en inre, yttre eller randpunkt till följande områden i $\mathbb{R}^3$ (tolka områdena geometriskt och förstå hur punkten $(1, 1, 1)$ förhåller sig till dem).

a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = z\}$

b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x < z\}$

c) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \le z\}$

d) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = z\}$

e) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y < z + 1\}$

f) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x < y + 1 < z + 2\}$

5. Parametrisera på två olika sätt den kurva som följer ellipsen $x^2 + 4y^2 = 9$ i första kvadranten från $(3, 0)$ till $(1, \sqrt{2})$.

6. Grafen till funktionen $f(x) = \sqrt{8 - 2x^2}$, $-2 \le x \le 2$, beskriver en funktionskurva i planet. Skissa kurvan och bestäm två olika parametriseringar av kurvan.

7. Bestäm en integral som ger längden av kurvan i uppgift 5 ovan och beräkna den med hjälp av Matlab.

8. Följande parametriseringar beskriver olika kurvor i planet. Skissa dem och markera den orientering som följer med resp parametrisering. Vilka beskriver enkla slutna kurvor?

a) $\mathbf{r} = \sin t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j}$, $-\pi/2 \le t \le \frac{3\pi}{2}$

b) $\mathbf{r} = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$, $-1 \le t \le 1$

c) $\mathbf{r} = t^2\mathbf{i} + t(1 - t^2)\mathbf{j}$, $-1 \le t \le 1$

d) $\mathbf{r} = t^2\mathbf{i} + t^4\mathbf{j}$, $-1 \le t \le 1$

9. Bestäm normallinjen till den nivåkurva till funktionen $f(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ som går genom punkten $(1, 2)$

10. Bestäm normallinjen till den nivåyta till funktionen $f(x, y, z) = x^2y + y^2z + z^2x$ som går genom punkten $(1, -1, 1)$

11. Avgör vilka av följande punkter som är kritiska resp singulära till funktionen $f(x,y) = x|y| - x$

a) $(1,1)$

b) $(1,0)$

c) $(0,1)$

d) $(0,0)$

12. Avör vilka av följande funktioner som är kontinuerliga på $\mathbb{R}^2$

a) $f(x,y) = \begin{cases} xy & , \text{ då } (x,y) \neq (1,1) \\ 1 & , \text{ då } (x,y) = (1,1) \end{cases}$

b) $f(x,y) = \begin{cases} \sin y & , \text{ då } (x,y) \neq (0,1) \\ 0 & , \text{ då } (x,y) = (0,1) \end{cases}$

c) $f(x,y) = \begin{cases} x^2 + y^2 - 2xy & , \text{ då } x \neq y \\ 0 & , \text{ då } x = y \end{cases}$

d) $f(x,y) = \begin{cases} xy & , \text{ då } x \neq y \\ x^2 & , \text{ då } x = y \end{cases}$

13. Beräkna $\displaystyle\iint_S xz\,dS$ då S är den del av planet $z = 5+2x-2y$ där $0 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 3$

14. Beräkna arean av den del av ytan $z = xy$ där $x^2 + y^2 \leq 8, x \geq 0, y \geq 0$

15. Beräkna $\displaystyle\iint_S y^2 z\,dS$ då S är ytan som ges av parametriseringen

$$\mathbf{r} = u^2\mathbf{i} + v\mathbf{j} + u\mathbf{k} \text{ där } 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1$$

16. Beräkna $\displaystyle\iint_S (x^2 + y^2)z\,dS$ då S är den del av sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ där $z \geq 0$

Svar

1. Alla omgivingar $B_\epsilon(1,2)$ sådana att $\sqrt{0.0034} < \epsilon \leq 0.1$ duger t.ex. $B_{0.1}(1,2)$

2. $\epsilon \leq -z$

3. Antag att $B_\epsilon(P)$ är en omgivning av $P=(1,0,0,1)$. Då ligger punkten $(1+\frac{\epsilon}{2},0,0,1)$ i mängden $\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4 : x>z\}$ och är samtidigt en punkt i $B_\epsilon(P)$.

4. **a)** randpunkt
b) randpunkt
c) randpunkt
d) randpunkt
e) randpunkt
f) inre punkt

5. Två naturliga parametriseringar är;

$$\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = \frac{3}{2}\sin t \end{cases}, \quad 0 \xrightarrow{t} \arccos\frac{1}{3} \qquad \text{och} \qquad \begin{cases} x = t \\ y = \frac{1}{2}\sqrt{9-t^2} \end{cases}, \quad 3 \xrightarrow{t} 1$$

Det finns dock oändligt många andra sätt att parametrisera kurvan.

6. Kurvan är den övre delen av ellipsen med centrum i $(0,0)$ och halvaxlarna 2 (i x-riktning) respektive $\sqrt{8}$ (i y-riktning). Två naturliga parametriseringar är;

$$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = \sqrt{8}\sin t \end{cases}, \quad 0 \xrightarrow{t} \pi \qquad \text{och} \qquad \begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{8-2x^2} \end{cases}, \quad -2 \xrightarrow{t} 2$$

Men som sagt det finns (som alltid) oändligt många sätt att parametrisera kurvan. Notera att ovanstående parametriseringar ger olika orientering (genomlöpstiktning) av kurvan.

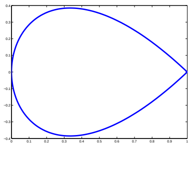
7. Med parametriseringarna från svaret till uppgift 5 så får vi;

$$\int_1^3 \sqrt{1+\frac{t^2}{4(9-t^2)}}\,dt \approx 2.63 \qquad \text{respektive} \qquad \int_0^{\arccos\frac{1}{3}} \sqrt{9\sin^2(t)+\frac{9}{4}\cos^2(t)}\,dt \approx 2.63$$

8. **a)** enkel sluten kurva. Kurvan är cirkeln $x^2+y^2=1$ som genomlöps precis ett varv med start och början i $(-1,0)$.

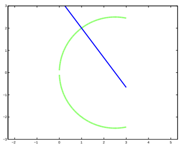
b) enkel men ej sluten kurva. Kurvan är parabelbågen $y=x^2$ från $(-1,1)$ till $(1,1)$.

c) enkel sluten kurva ty $\mathbf{r}(-1)=\mathbf{i}=\mathbf{r}(1)$ och man ser lätt att $\mathbf{r}(t_0)=\mathbf{r}(t_1) \Rightarrow t_0=t_1$. Kurvan börjar i punkten $(1,0)$ och går längs en båge i första kvadranten till origo (där $t=0$). Sedan fortsätter kurvan i fjärde kvadranten längs en båge tillbaks till $(1,0)$.

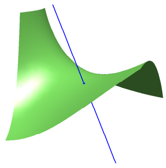


d) sluten men ej enkel. Kurvan är parabelbågen $y=x^2$ från $(1,1)$ till $(0,0)$ och sedan tillbaks igen.

9. $4x + 3y = 10$



10. $1 - x = -y - 1 = \frac{1}{3}(z - 1)$



11. **a)** ej kritisk och ej singulär punkt
b) singulär men ej kritisk punkt
c) kritisk men ej singulär punkt
d) ej kritisk och ej singulär punkt

12. **a)** kontinuerlig
b) ej kontinuerlig
c) kontinuerlig
d) kontinuerlig

13. 44

14. $13\pi/3$

15. $\frac{1}{36}(5^{3/2} - 1)$

16. 16π