MATEMATIK **Hjälpmedel: bifogat formelblad, utdelad ordlista, ej räknedosa**
Chalmers tekniska högskola Datum: 2009-01-10 kl. 08.30–12.30
Tentamen Telefonvakt: Magnus Goffeng
tel. 0762-721860

TMA043 Flervariabelanalys E2

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.
För godkänt på tentan krävs 25 poäng på tentamens första del (godkäntdelen) Bonuspoäng från duggor 08/09 räknas med, men maximal poäng på denna del är 32. För godkänt på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt.
För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens två delar.
Lösningar läggs ut på kursens webbsida 11/1. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.
Granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar.

2. Låt $\mathbf{F} = e^y\mathbf{i} + xe^y\mathbf{j} + \mathbf{k}$

(a) Undersök om kraftfältet $\mathbf{F}$ är källfritt och/eller virvelfritt i $\mathbb{R}^3$ (2p)

Lösning: Vi har

$$\mathbf{curl}\,\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ e^y & xe^y & 1 \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xe^y & 1 \end{vmatrix}}_{=0} \mathbf{i} - \underbrace{\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ e^y & 1 \end{vmatrix}}_{=0} \mathbf{j} + \underbrace{\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ e^y & xe^y \end{vmatrix}}_{=0} \mathbf{k} = \mathbf{0}$$

så $\mathbf{F}$ är virvelfritt. Vidare har vi

$$\mathbf{div}\,\mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}e^y + \frac{\partial}{\partial y}(xe^y) + \frac{\partial}{\partial z}1 = xe^y \not\equiv 0$$

så $\mathbf{F}$ är inte källfritt i hela $\mathbb{R}^3$

Svar: $\mathbf{F}$ är virvelfritt men ej källfritt

(b) Har kurvintegralen $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$ samma värde för alla styckvis glatta kurvor $\mathcal{C}$ med begynnelsepunkt i $(-1, 0, 0)$ och slutpunkt i $(1, 0, 0)$? (motivera ditt svar) (1p)

Svar: Ja

Motivering: Eftersom $\mathbf{F}$ är virvelfritt i hela $\mathbb{R}^3$ så är, enligt känd sats i kursen (Sats 4 sid 860), $\mathbf{F}$ också ett konservativt fält (alternativt kan man visa att $\mathbf{F}$ är konservativt genom att ta fram en potential ϕ till $\mathbf{F}$). Enligt annan känd sats i kursen (sats 1 sid 828) följer det därför att kurvintegralen är oberoende av vägen (detta följer av att $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \int_a^b \frac{d\phi(\mathbf{r}(t))}{dt} dt = \phi(\mathbf{r}(b)) - \phi(\mathbf{r}(a))$, där $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ är en parametrisering av kurvan $\mathcal{C}$ sådan att $\mathbf{r}(b) = (1, 0, 0)$ och $\mathbf{r}(a) = (-1, 0, 0)$)

(c) Beräkna det arbete som kraftfältet $\mathbf{F}$ utför på en partikel som rör sig längs cirkelbågen $x^2 + y^2 = 1,\ y \geq 0$ i xy-planet (dvs där $z = 0$), från $(-1, 0, 0)$ till $(1, 0, 0)$ (3p)

Lösning: Det arbete som kraftfältet utför ges av kurvintegralen $\int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$, där $\mathcal{C}_1$ är den i uppgiften angivna cirkelbågen. Eftersom $\mathbf{F}$ är ett konservativt fält så är kurvintegralen oberoende av vägen mellan de två punkterna $(-1, 0, 0)$ till $(1, 0, 0)$ (se uppgift (b) ovan). Vi väljer därför istället att beräkna den betydligt enklare kurvintegralen längs med det räta linjestycket mellan punkterna dvs den kurva $\mathcal{C}_2$ som ges av parametriseringen $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i}$, där $-1 \xrightarrow{t} 1$. Då är $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{i}$ och $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = \mathbf{i} + t\mathbf{j} + \mathbf{k}$ så

$$\int_{\mathcal{C}_2} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \int_{-1}^{1} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \bullet \mathbf{r}'(t)\, dt = \int_{-1}^{1} dt = 2$$

Svar: 2

3. Sambandet mellan de Cartesiska koordinaterna x, y, z och de sfäriska koordinaterna r, ϕ, θ ges av $\begin{cases} x = r \sin\phi \cos\theta \\ y = r \sin\phi \sin\theta \\ z = r \cos\phi \end{cases}$

(a) Uttryck området $\Omega : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0$ i de sfäriska koordinaterna (2p)

Svar: $0 \leq r \leq 2, 0 \leq \phi \leq \dfrac{\pi}{2}, 0 \leq \theta < 2\pi$

(b) Beräkna massan av den kropp som definieras av Ω då densiteten ges av $\rho(x, y, z) = z$ (4p)

Lösning:

$$Massan = \iiint_\Omega z\, dxdydz = \int_0^2 \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \underbrace{r\cos\phi}_{z} \underbrace{r^2 \sin\phi\, d\theta d\phi dr}_{dxdydz} =$$

$$= \left(\int_0^2 r^3 dr\right) \left(\int_0^{\pi/2} \cos\phi \sin\phi\, d\phi\right) \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right) = \left[\frac{1}{4} r^4\right]_0^2 \left[\frac{1}{2}\sin^2\phi\right]_0^{\pi/2} 2\pi = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\pi = 4\pi$$

Svar: 4π

4. (a) Förklara vad som menas med begreppen *kritisk punkt* respektive *lokalt minimum.* (2p)

Lösning: se t.ex. sid 708 i kursboken

(b) Finn och klassificera de kritiska punkterna till $f(x, y) = x^2 y - x \ln y$ (4p)

Lösning: $\nabla f(x, y) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 2xy - \ln y & = & 0 \\ x^2 - \frac{x}{y} & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2xy - \ln y & = & 0 \\ x\left(x - \frac{1}{y}\right) & = & 0 \end{cases}$

Den andra ekvationen (dvs $x\left(x - \frac{1}{y}\right) = 0$) är uppfylld om $x = 0$ eller $x = \frac{1}{y}$. Med $x = 0$ i den första ekvationen (dvs $2xy - \ln y = 0$) så får vi att $-\ln y = 0 \Leftrightarrow y = 1$. Med $x = \frac{1}{y}$ i den första ekvationen så får vi istället $2 - \ln y = 0 \Leftrightarrow y = e^2$, så de kritiska punkterna till funktionen $f(x, y) = x^2 y - x \ln y$ är $(0, 1)$ och (e^{-2}, e^2).
För att avgöra karaktären på de kritiska punkterna så undersöker vi Hessianen i respektive punkt. Hessianen till $f(x, y)$ är $\mathscr{H}(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial xy} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial yx} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y & 2x - \frac{1}{y} \\ 2x - \frac{1}{y} & \frac{x}{y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}$.

$\mathscr{H}(0,1) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ är indefinit ty $det(\mathscr{H}(0,1)) = AC - B^2 = -1 < 0$, så $(0,1)$ är en sadelpunkt.
$\mathscr{H}(e^{-2}, e^2) = \begin{bmatrix} 2e^2 & e^{-2} \\ e^{-2} & e^{-6} \end{bmatrix}$ är negativt definit ty $det(\mathscr{H}(e^{-2}, e^2)) = AC - B^2 = e^{-4} > 0$ och $A = f_{11}(e^{-2}, e^2) = 2e^2 > 0$, så f har ett lokalt minimum i (e^{-2}, e^2).

Svar: Funktionens kritiska punkter är $(0,1)$ och (e^{-2}, e^2). Funktionen har en sadelpunkt i $(0,1)$ och ett lokalt minimum i (e^{-2}, e^2).

5. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte motivera dig. Rätt svar ger 1p, inget svar 0p och fel svar -1p. Dock ej mindre än 0p totalt. (4p)

(a) Om $D_{\mathbf{v}} f(a,b) = 0$ för alla enhetsvektorer $\mathbf{v}$ så är (a,b) en kritisk punkt till $f(x,y)$

Svar: Sant (ty om vi väljer $\mathbf{v} = \mathbf{i}$ resp. $\mathbf{v} = \mathbf{j}$ i identiteten $D_{\mathbf{v}} f(a,b) = 0$ så får vi spec. att $f_1(a,b) = 0$ och $f_2(a,b) = 0$ och därmed $\nabla f(a,b) = \mathbf{0}$)

(b) Alla kontinuerliga funktioner är också differentierbara

Svar: Falskt (betrakta t.ex. $f(x,y) = |x|$, vilket är kontinuerlig men ej differentierbar i punkter på y-axeln)

(c) Integralen $\iint_D \frac{dxdy}{x^2+y^2}$, där $D : x^2 + y^2 \leq 1$, är konvergent

Svar: Falskt (ty $\iint_D \frac{dxdy}{x^2+y^2} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{1}{r^2} r dr d\theta = 2\pi \left[\ln r\right]_0^1 = \infty$)

(d) Funktionen $f(x,y) = x\arctan(y) + y\sin x$ har ett största värde på cirkeln $x^2 + y^2 = 1$ (dvs. maximum av $f(x,y)$, under bivillkoret $x^2 + y^2 = 1$, existerar)

Svar: Sant (ty en kontinuerlig funktion har alltid ett största (och minsta) värde på ett kompakt område (dvs ett område som är slutet och begränsat), se sats 2 sid 708)

Del 2: Överbetygsdelen

Uppgifterna i denna del rättas och bedöms endast om den första delen är godkänd.

6. Bestäm det största och minsta värdet av funktionen $f(x,y,z) = x$ på skärningen mellan planet $z = x + y$ och ellipsoiden $x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 8$ (6p)

Lösning: Låt $g(x,y,z) = x + y - z$ och $h(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 8$. Om f antar sitt största/minsta värde i en punkt (x_0, y_0, z_0) så existerar det (enligt Lagrange multiplikatormetod) λ_0 och μ_0 sådana att $(x_0, y_0, z_0, \lambda_0, \mu_0)$ är en kritisk punkt till Lagrangefunktionen $L(x,y,z,\lambda,\mu) = f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z) + \mu h(x,y,z)$ så vi hittar alla kandidater till största resp. minsta värde genom att lösa följande ekvationssystem;

$$\begin{cases} f_1(x,y,z) + \lambda g_1(x,y,z) + \mu h_1(x,y,z) = 0 \\ f_2(x,y,z) + \lambda g_2(x,y,z) + \mu h_2(x,y,z) = 0 \\ f_3(x,y,z) + \lambda g_3(x,y,z) + \mu h_3(x,y,z) = 0 \\ g(x,y,z) = 0 \\ h(x,y,z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \lambda + \mu 2x = 0 & (Ekv\,1) \\ \lambda + \mu 4y = 0 & (Ekv\,2) \\ -\lambda + \mu 4z = 0 & (Ekv\,3) \\ x + y - z = 0 & (Ekv\,4) \\ x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 8 = 0 & (Ekv\,5) \end{cases}$$

Av $Ekv\,1-3$ följer det att $\mu \neq 0$ (ty $\mu = 0$ insatt i dessa ekvationer leder till en orimlighet). Av $Ekv\,2-3$ följer det därför att $z = -y$ (addera resp. led i ekvationerna och dividera med 4μ). Använder vi detta (dvs att $z = -y$) i *Ekv* 4 så får vi att $x = -2y$. Om vi sedan använder att $z = -y$ och $x = -2y$ i *Ekv* 5 så får vi att $8y^2 = 8 \Leftrightarrow y = \pm 1$, vilket ger oss lösningarna $(2, -1, 1), (-2, 1, -1)$. Vi har $f(2, -1, 1) = 2$ och $f(-2, 1, -1) = -2$.

Alternativ lösning 1: Eftersom vi bara studerar punkter där $z = x+y$ så kan vi ersätta z med $x+y$ i funktionen f (vilket i detta fall ger samma uttryck eftersom den inte beror på z) och i bivillkoret $x^2+2y^2+2z^2 = 8$. Vi reducerar då problemet till att hitta största/minsta värde av $\tilde{f}(x, y) = x$ under villkoret att $\tilde{g}(x, y) = x^2 + 2y^2 + 2(x + y)^2 - 8 = 0$. Lagrange multiplikatormetod ger ekvationsystemet;

$$\begin{cases} \tilde{f}_1(x,y) + \lambda \tilde{g}_1(x,y) = 0 \\ \tilde{f}_2(x,y) + \lambda \tilde{g}_2(x,y) = 0 \\ \tilde{g}(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \lambda(2x + 4(x+y)) = 0 & (Ekv\,1) \\ \lambda(4y + 4(x+y)) = 0 & (Ekv\,2) \\ x^2 + 2y^2 + 2(x+y)^2 - 8 = 0 & (Ekv\,3) \end{cases}$$

Av *Ekv* $1 - 2$ följer det att $\lambda \neq 0$ (ty $\lambda = 0$ insatt i dessa ekvationer leder till en orimlighet). Av *Ekv* 2 följer det därför att $x = -2y$, vilket insatt i *Ekv* 3 ger $8y^2 = 8 \Leftrightarrow y = \pm 1$. Lösningarna är således $(2, -1)$ och $(-2, 1)$ och vi har $\tilde{f}(2, -1) = 2$ och $\tilde{f}(-2, 1) = -2$

Alternativ lösning 2: Som i föregående lösning kan vi reducera problemet till att hitta största/minsta värde av $\tilde{f}(x, y) = x$ under villkoret att $\tilde{g}(x, y) = x^2+2y^2+2(x+y)^2-8 = 0$. Detta villkor kan skrivas $2x^2 + 4(y + \frac{x}{2})^2 = 8$ varav vi ser direkt att x blir som störst om $y + \frac{x}{2} = 0$, för vilket $2x^2 = 8 \Leftrightarrow x = \pm 2$. Lösningarna är således $(2, -1)$ och $(-2, 1)$ och vi har $\tilde{f}(2, -1) = 2$ och $\tilde{f}(-2, 1) = -2$

Svar: Det största värdet är 2 och det minsta värdet är -2

7. Beräkna det totala flödet av hastighetsfältet $\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ genom den del av konen $z^2 = x^2 + y^2$ där $1 \leq z \leq 2$, i riktning in mot z-axeln, genom att (6p)

(a) använda definitionen av ytintegral (du behöver då bl.a. parametrisera ytan och bestämma normalvektorer i varje punkt på ytan)

Lösning: Ytan $\mathcal{S} : z = \sqrt{x^2 + y^2}$, parametriseras naturligt genom att välja x och y som parametrar med parameterområdet $D : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$. Normalvektorerna (ej normerade), med riktning in mot z-axeln, ges av $\mathbf{n} = -z'_x\mathbf{i} - z'_y\mathbf{j} + \mathbf{k} = -\frac{x}{z}\mathbf{i} - \frac{y}{z}\mathbf{j} + \mathbf{k}$. Areaelementet ges av $dS = \sqrt{\left(\frac{x}{z}\right)^2 + \left(\frac{y}{z}\right)^2 + 1}dxdy$ så

$$\text{Flödet genom ytan } \mathcal{S} = \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{S} = \iint_D \mathbf{F} \bullet \left(-\frac{x}{z}\mathbf{i} - \frac{y}{z}\mathbf{j} + \mathbf{k}\right) dxdy$$

$$= \iint_D (y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \bullet \left(-\frac{x}{z}\mathbf{i} - \frac{y}{z}\mathbf{j} + \mathbf{k}\right) dxdy = \iint_D zdxdy$$

$$= \iint_D \sqrt{x^2 + y^2}dxdy = \int_0^{2\pi} \int_1^2 r \underbrace{rdrd\theta}_{dxdy} = 2\pi \left[\frac{1}{3}r^3\right]_1^2 = \frac{14\pi}{3}$$

Svar: $\frac{14\pi}{3}$

(b) tillämpa Gauss divergens sats på lämplig sluten yta

Lösning: Låt $\mathcal{S}_1$ vara cirkelskivan $x^2 + y^2 \leq 1, z = 1$ och låt $\mathcal{S}_2$ vara cirkelskivan $x^2 + y^2 \leq 4, z = 2$. Tillsammans med ytan $\mathcal{S}$ (se deluppgift (a)) så utgör de begränsningsytan till området $K : x^2 + y^2 \leq z^2, 1 \leq z \leq 2$. Om $\mathbf{n}$ är den utåtriktade enhetsnormalen så ger Gauss sats att;

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \bullet \mathbf{n} dS = \iiint_K div(\mathbf{F})dxdydz - \iint_{\mathcal{S}_1} \mathbf{F} \bullet \mathbf{n} dS - \iint_{\mathcal{S}_2} \mathbf{F} \bullet \mathbf{n} dS =$$

$$= \iiint_K dxdydz + \underbrace{\iint_{x^2+y^2\le 1} dxdy}_{\pi} - \underbrace{\iint_{x^2+y^2\le 4} 2dxdy}_{8\pi} = \iiint_K dxdydz - 7\pi =$$

$$= \underbrace{\iint_{x^2+y^2\le 1} dxdy}_{\pi} + \iint_{1\le x^2+y^2\le 4} \left(2 - \sqrt{x^2+y^2}\right) dxdy - 7\pi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_1^2 (2-r) r dr d\theta - 6\pi = 2\pi \left[r^2 - \frac{1}{3} r^3 \right]_1^2 - 6\pi = \frac{4\pi}{3} - 6\pi = -\frac{14\pi}{3}$$

Trippelintegralen $\iiint_K dxdydz$ är volymen av den stympade kon som erhålls då toppkonen med höjd 1 och radie 1 tas bort från konen med höjd 2 och radie 2. Den återstående volymen är $\frac{1}{3}(2 \cdot \pi \cdot 2^2 - 1 \cdot \pi \cdot 1^2) = \frac{7\pi}{3}$ vilket också erhålls med integralberäkningen ovan.
Normalen i ytintegralen över $\mathcal{S}$, i ovanstående kalkyler, pekar ut från z-axeln. För att få det efterfrågade flödet in mot z-axeln så byter vi seledes tecken på resultatet ovan.
Svar: $\frac{14\pi}{3}$

8. Välj **en** av följande två deluppgifter (om det i dina lösningarna finns något redovisat från båda deluppgifterna så granskas endast den först redovisade). (6p)

(a) Formulera och bevisa kedjeregeln för sammansatta funktioner av typen $f \circ g$ där $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ och $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Lösning: se sid 675 i kursboken eller föreläsningsanteckningar

(b) Formulera Greens formel och bevisa den för områden som är både x-enkla och y-enkla.

Lösning: se sid 865-866 i kursboken eller föreläsningsanteckningar

Anonym kod	TMA043 Flervariabelanalys E, 090110	sid.nummer	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Bestäm Taylorpolynomet av grad 2 i punkten $(0, 0)$ till funktionen $f(x, y) = \dfrac{1+x}{1+y}$ (2p)

Lösning: $f_1(x, y) = \dfrac{1}{1+y},\ f_2(x, y) = \dfrac{-(1+x)}{(1+y)^2}$

$f_{11}(x, y) = 0,\ f_{12}(x, y) = \dfrac{-1}{(1+y)^2},\ f_{22}(x, y) = \dfrac{2(1+x)}{(1+y)^3}$

$f(0, 0) = 1, f_1(0, 0) = 1, f_2(0, 0) = -1, f_{11}(0, 0) = 0, f_{12}(0, 0) = -1, f_{22}(0, 0) = 2$

$P_2(x, y) = f(0, 0)+f_1(0, 0)x+f_2(0, 0)y+\dfrac{1}{2}\left(f_{11}(0, 0)x^2 + 2f_{12}(0, 0)xy + f_{22}(0, 0)y^2\right) = 1 + x - y - xy + y^2$

Svar: $P_2(x, y) = 1 + x - y - xy + y^2$

(b) Bestäm en ekvation för tangentplanet till nivåytan $xe^y + ye^z - xz = 1$ i punkten $(1, 0, 0)$. (2p)

Lösning: Sätt $g(x, y, z) = xe^y + ye^z - xz$. Då har vi $g_1(x, y.z) = e^y - z,\ g_2(x, y, z) = xe^y + e^z,\ g_3(x, y, z) = ye^z - x$ och speciellt får vi att $g_1(1, 0, 0) = 1,\ g_2(1, 0, 0) = 2,\ g_3(1, 0, 0) = -1$ så tangentplanet i punkten $(1, 0, 0)$ beskrivs av ekvationen

$g_1(1, 0, 0)(x - 1) + g_2(1, 0, 0)(y - 0) + g_3(1, 0, 0)(z - 0) = 0 \Leftrightarrow x - 1 + 2y - z = 0$

Svar: $z = x + 2y - 1$

(c) Låt f vara en funktion av två variabler som är sådan att $f_1(3, 5) = 4$ och $f_2(3, 5) = 3$. Beräkna $h_2(2, 1)$ då $h(x, y) = f(2x - y, x + 3y)$. (2p)

Lösning: Kedjeregeln ger att

$$h_2(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}f(2x-y, x+3y) = f_1(2x-y, x+3y)\frac{\partial}{\partial y}(2x-y)+f_2(2x-y, x+3y)\frac{\partial}{\partial y}(x+3y) =$$

$$= -f_1(2x - y, x + 3y) + 3f_2(2x - y, x + 3y)$$

Speciellt får vi att $h_2(2, 1) = -f_1(3, 5) + 3f_2(3, 5) = -4 + 9 = 5$

Svar: $h_2(2, 1) = 5$

(d) Låt $\mathcal{C}$ vara skärningskurvan mellan planet $z = \sqrt{3}\,x$ och cylindern $y^2 = x^3$. Beräkna längden av den del av kurvan som ligger mellan origo och punkten $(1, 1, \sqrt{3})$ (2p)

Lösning: Kurvbiten parametriseras av $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^{3/2}\mathbf{j} + \sqrt{3}\,t\mathbf{k}$, där $0 \xrightarrow{t} 1$, så

kurvbitens längd$= \displaystyle\int_0^1 |\mathbf{r}'(t)|dt = \int_0^1 \sqrt{1^2 + \left(\frac{3}{2}t^{1/2}\right)^2 + (\sqrt{3})^2}\, dt = \int_0^1 \sqrt{4 + \frac{9}{4}t}\, dt =$

$$\left[\frac{8}{27}\left(4 + \frac{9}{4}t\right)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{8}{27}\left(\frac{125}{8} - 8\right) = \frac{61}{27}$$

Svar: $\frac{61}{27}$

(e) Använd Greens formel för att beräkna kurvintegralen $\oint_{\mathcal{C}} e^{xy}\, dy$, där $\mathcal{C}$ är randen till det rektangulära området $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2$, orienterad moturs. (2p)

Lösning:

$$\oint_{\mathcal{C}} e^{xy}\, dy = \int_0^2 \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{xy}\right)\, dxdy = \int_0^2 \left[e^{xy}\right]_0^1 dy = \int_0^2 (e^y - 1)dy = \left[e^y - y\right]_0^2 = e^2 - 3$$

Svar: $\oint_{\mathcal{C}} e^{xy}\, dy = e^2 - 3$

Formelblad för TMA043 08/09

Trigonometri.

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}$$

Integralkatalog

$$\begin{aligned}
\int x^a dx &= \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad a \neq -1 \\
\int \sin x dx &= -\cos x + C \\
\int \frac{1}{cos2x} dx &= \tan x + C \\
\int e^x dx &= e^x + C \\
\int \frac{1}{\sqrt{1-x2}} dx &= \arcsin x + C \\
\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx &= \ln|f(x)| + C
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x} dx &= \ln|x| + C \\
\int \cos x dx &= \sin x + C \\
\int \frac{1}{sin2x} dx &= -\cot x + C \\
\int a^x dx &= \frac{a^x}{\ln a} + C \quad 0 < a \neq 1 \\
\int \frac{1}{x2+a2} dx &= \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C \quad a \neq 0 \\
\int \frac{1}{\sqrt{x2+a}} dx &= \ln|x + \sqrt{x2+a}| + C \quad a \neq 0 \\
\int \sqrt{x2+a} dx &= \frac{1}{2}(x\sqrt{x2+a} + a\ln|x+\sqrt{x2+a}|) + C
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(x2+1)^n} dx &= I_n \\
I_{n+1} &= \frac{x}{2n(x2+1)^n} + \frac{2n-1}{2n} I_n
\end{aligned}$$

Maclaurinutvecklingar

$$\begin{aligned}
e^x &= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + x^{n+1}B(x) \\
\sin x &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + x^{2n+1}B(x) \\
\cos x &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + x^{2n+2}B(x) \\
(1+x)^\alpha &= \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c}\alpha \\ k\end{array}\right) x^k + x^{n+1}B(x) && |x| < 1 \\
\ln(1+x) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}x^k}{k} + x^{n+1}B(x) && -1 < x \leq 1 \\
\arctan x &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{2k-1} + x^{2n+1}B(x) && |x| \leq 1
\end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{c}\alpha \\ k\end{array}\right) = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k(k-1)(k-2)\ldots 1} \qquad \left(\begin{array}{c}\alpha \\ 0\end{array}\right) = 1$$

Övrigt

Tyngdpunkten (x_T, y_T, z_T) för Ω ges av $x_T = \dfrac{\iiint_\Omega x\rho(x,y,z)\,dxdydz}{\iiint_\Omega \rho(x,y,z)\,dxdydz}$, analogt för y_T, z_T.

$\rho(x,y,z)$ är densiteten.