MATEMATIK **Hjälpmedel: bifogat formelblad, ordlistan från kurswebbsidan, ej räknedosa**
Chalmers tekniska högskola Datum: 090828 kl. 14.00 - 18.00
Tentamen Telefonvakt: David Heintz
Telefon: 0762-721861

Lösningsförslag till TMA043/MVE085

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.
För godkänt på tentan krävs 25 poäng på tentamens första del (godkäntdelen) Bonuspoäng från duggor 08/09 räknas med, men maximal poäng på denna del är 32. För godkänt på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens två delar.
Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

Del 1: Godkäntdelen

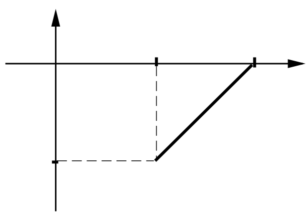
1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. **Lösgör bladet och lämna in det som blad 1 tillsammans med övriga lösningar.** (14p)

Till följande uppgifter skall fullständiga lösningar inlämnas. **Endast svar ger inga poäng**. Motivera och förklara så väl du kan.

2. (a) Skissa i xy-planet på den kurva $\mathcal{C}$ som ges av parametriseringen (1p)

$$\begin{cases} x = t^2 + 1 \\ y = t^2 - 1 \end{cases}, \ 0 \le t \le 1$$

Lösning:



(b) Visa att vektorfältet $\mathbf{F} = (x+y)\mathbf{i} + (x+1)\mathbf{j}$ är konservativt i $\mathbb{R}^2$ och bestäm en potential till $\mathbf{F}$ (3p)

Lösning/Bevis: Vektorfältet $\mathbf{F}$ är konservativt i $\mathbb{R}^2$ om det finns en potential till vektorfältet i $\mathbb{R}^2$ dvs. om det finns en reelvärd funktion $\phi(x, y)$ sådan att$\mathbf{F} = \nabla\phi$, för alla $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Vi söker alltså ϕ som uppfyller;

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial x} = x + y \quad (ekv.1) \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = x + 1 \quad (ekv.2) \end{cases}$$

Den första ekvationen ger $\phi = \dfrac{x^2}{2} + xy + g(y)$, för någon funktion g av en variabel. Insättning i den andra ekvationen ger sedan; $x + g'(y) = x + 1 \Rightarrow g'(y) = 1 \Rightarrow g(y) = y + C$, för någon konstant C. Således är $\phi(x, y) = \frac{x^2}{2} + xy + y$ en potential till $\mathbf{F}$.

Svar: $\phi(x, y) = \frac{x^2}{2} + xy + y$ är en potential till $\mathbf{F}$

(c) Beräkna det arbete $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}$ som kraftfältet $\mathbf{F}$ i deluppgift (b) utför på en partikel som rör sig längs kurvan i deluppgift (a) från $(1,-1)$ till $(2,0)$ (2p)

Lösning: Eftersom vi i (b) bestämt en potential till vektorfältet så beräknar vi enklast arbetet m.h.a. denna potential enl. $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r} = \phi(2,0) - \phi(1,-1) = 2 - \dfrac{-3}{2} = \dfrac{7}{2}$

Alternativt kan vi beräkna integralen $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}$ m.h.a. parametriseringen i (a) enl.

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}} (x+y)dx + (x+1)dy = \int_0^1 \left(2t^2 \cdot 2t + (t^2+2)2t\right) dt =$$
$$= \int_0^1 \left(6t^3 + 4t\right) dt = \left[\frac{3}{2}t^4 + 2t^2\right]_0^1 = \frac{3}{2} + 2 = \frac{7}{2}$$

Svar: $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r} = \dfrac{7}{2}$

3. (a) Vilken typ av andragradsyta beskrivs av parametriseringen (1p)

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = r^2 \end{cases}, \ r \geq 0 \ , \ 0 \leq \theta < 2\pi$$

Lösning: Observera att $x^2 + y^2 = r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta = r^2 = z$, så parametriseringen beskriver punkter på paraboloiden $z = x^2 + y^2$

Svar: En paraboloid

(b) Avgör om hastighetsfältet $\mathbf{F} = (x+y)\mathbf{i} + (y-x)\mathbf{j} - 2z\mathbf{k}$ är virvelfritt och/eller källfritt i $\mathbb{R}^3$ (2p)

Lösning: Ett hastighetsfält sägs vara virvelfritt om $\operatorname{curl}\mathbf{F} = \mathbf{0}$. I detta fall har vi;

$$\operatorname{curl}\mathbf{F} = \nabla\times\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x+y & y-x & -2z \end{vmatrix} =$$

$$= \underbrace{\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y-x & -2z \end{vmatrix}}_{=0}\mathbf{i} - \underbrace{\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x+y & -2z \end{vmatrix}}_{=0}\mathbf{j} + \underbrace{\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ x+y & y-x \end{vmatrix}}_{=-2}\mathbf{k} = -2\mathbf{k} \neq \mathbf{0}$$

så $\mathbf{F}$ är inte virvelfritt. Vidare sägs ett vektorfält vara källfritt om $\operatorname{div}\mathbf{F} = \mathbf{0}$. I detta fall har vi;

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \nabla\bullet\mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x+y) + \frac{\partial}{\partial y}(y-x) + \frac{\partial}{\partial z}(-2z) = 1 + 1 - 2 = 0$$

så $\mathbf{F}$ är källfritt i hela $\mathbb{R}^3$

Svar: $\mathbf{F}$ är källfritt men ej virvelfritt

(c) Beräkna flödet $\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F}\bullet\hat{\mathbf{N}}dS$ av hastighetsfältet i deluppgift (b) nedåt (dvs. i negativ z-led) genom den del $\mathcal{S}$ av ytan i deluppgift (a) där $0 \leq r \leq 1$ (3p)

Lösning: Om vi betraktar ytan i (a) som funktionsyta till funktionen $f(x,y) = x^2+y^2$ så är;

$$\hat{\mathbf{N}}dS = \pm\left(\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} - \mathbf{k}\right) = \pm(2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} - \mathbf{k})$$

Eftersom flödet nedåt genom ytan söks, så väljer vi tecken så att normalvektorerna får negativ z-koordinat. Flödet beräknas sedan genom att integrera $\mathbf{F}\bullet\hat{\mathbf{N}}dS$ över parameterområdet $D : x^2+y^2 \leq 1$ och övergå till polära koordinater;

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F}\bullet\hat{\mathbf{N}}dS = \iint_D \big((x+y)2x+(y-x)2y-(-2(x^2+y^2))\big)\,dxdy =$$

$$= \iint_D \big(4(x^2+y^2)\big)\,dxdy = \iint_D 4\left(x^2+y^2\right)dxdy = \int_0^1\int_0^{2\pi} 4r^2\cdot rd\theta dr = 2\pi\left[r^4\right]_0^1 = 2\pi$$

Alternativ lösning 1: Med parametriseringen $\mathbf{r}=\mathbf{r}(r,\theta)$ från (a) så är;

$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial r}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\theta} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos\theta & \sin\theta & 2r \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = -2r^2\cos\theta\mathbf{i}-2r^2\sin\theta\mathbf{j}+r\mathbf{k}$$

Eftersom normalvektorerna $\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial r}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\theta}$ är uppåtriktade (ty z koordinaten är positiv) och vi söker flödet nedåt genom ytan (i negativ z-led) så byter vi tecken och får att;

$$\hat{\mathbf{N}}dS = -\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial r}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\theta}drd\theta = \left(2r^2\cos\theta\mathbf{i}+2r^2\sin\theta\mathbf{j}-r\mathbf{k}\right)drd\theta$$

Flödet beräknas sedan genom att integrera $\mathbf{F}\bullet\hat{\mathbf{N}}dS$ över parameterområdet $D : 0\leq r\leq 1, 0\leq\theta<2\pi$;

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F}\bullet\hat{\mathbf{N}}dS = \iint_D \left((r\cos\theta+r\sin\theta)2r^2\cos\theta+(r\sin\theta-r\cos\theta)2r^2\sin\theta+2r^3\right)drd\theta =$$

$$= \int_0^1\int_0^{2\pi} 4r^3 d\theta dr = 2\pi\left[r^4\right]_0^1 = 2\pi$$

Alternativ lösning 2: Uppgiften löses enklast m.h.a. Gauss sats. Cirkelskivan $\mathcal{S}_0 : x^2+y^2\leq 1, z=1$ och $\mathcal{S}$ utgör tillsammans begänsningsytan till kroppen $K : x^2+y^2 \leq z\leq 1$, så enligt Gauss sats är

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F}\bullet\hat{\mathbf{N}}dS = \iiint_K \mathbf{div}\,\mathbf{F}dxdydz - \iint_{\mathcal{S}_0}\mathbf{F}\bullet\hat{\mathbf{N}}dS$$

om vi väljer $\hat{\mathbf{N}}$ som de utåtriktade enhetsnormalerna. Eftersom hastighetsfältet är källfritt och $\hat{\mathbf{N}}=\mathbf{k}$ på $\mathcal{S}_0$ så får vi att;

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F}\bullet\hat{\mathbf{N}}dS = -\iint_{\mathcal{S}_0}(-2z)dS = 2\iint_{\mathcal{S}_0} dS = 2\cdot\text{arean av cirkelskivan } \mathcal{S}_0 = 2\pi$$

Svar: $\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F}\bullet\hat{\mathbf{N}}dS = 2\pi$

4. Finn och klassificera de kritiska punkterna till funktionen $f(x,y)=xy\,e^{-(x^2+y^2)/2}$ (6p)

Lösning: $\nabla f(x,y)=\mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{cases} y(1-x^2)e^{-(x^2+y^2)/2} &= 0 \\ x(1-y^2)e^{-(x^2+y^2)/2} &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(1-x^2) &= 0 \\ x(1-y^2) &= 0 \end{cases}$

En lösning är uppenbarligen $x=y=0$. Om $y\neq 0$ så följer det ur den första ekvationen att $x=\pm 1$, vilket insatt i den andra ekvationen ger $y=\pm 1$. Totalt får vi alltså de fem kritiska punkterna $(0,0),(1,1),(1,-1),(-1,1)$ och $(-1,-1)$.

För att avgöra karaktären på de kritiska punkterna så undersöker vi Hessianen i respektive punkt. Hessianen till $f(x,y)$ är

$$\mathscr{H}(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial xy} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial yx} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} = e^{-(x^2+y^2)/2}\begin{bmatrix} \left(-2xy-xy(1-x^2)\right) & \left(1-x^2-y^2(1-x^2)\right) \\ \left(1-x^2-y^2(1-x^2)\right) & \left(-2xy-xy(1-y^2)\right) \end{bmatrix}$$

$\mathscr{H}(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ är indefinit ty $det(\mathscr{H}(0,0)) = -1 < 0$, så $(0,0)$ är en sadelpunkt.
$\mathscr{H}(1,1) = e^{-1} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ är negativt definit ty $det(\mathscr{H}(1,1)) = 4e^{-2} > 0$ och $f_{11}(1,1) = -2e^{-1} < 0$, så f har ett lokalt maximum i $(1,1)$.
Eftersom Hessianen i punkten $(-1,-1)$ är samma som i punkten $(1,1)$ så har f ett lokalt maximum även i $(-1,-1)$.
$\mathscr{H}(1,-1) = e^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ är positivt definit ty $det(\mathscr{H}(1,-1)) = 4e^{-2} > 0$ och $f_{11}(1,1) = 2e^{-1} > 0$, så f har ett lokalt minimum i $(1,-1)$.
Eftersom Hessianen i punkten $(-1,1)$ är samma som i punkten $(1,-1)$ så har f ett lokalt minimum även i $(-1,1)$.

Svar: Funktionens kritiska punkter är $(0,0), (1,1), (1,-1), (-1,1)$ och $(-1,-1)$. Funktionen har en sadelpunkt i $(0,0)$, lokalt maximum i $(1,1)$ och $(-1,-1)$, samt lokalt minimum i $(1,-1)$ och $(-1,1)$.

Del 2: Överbetygsdelen

Endast om man ligger enstaka poäng från godkänt och presterat riktigt bra på någon av följande uppgifter kan poäng på denna del räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

5. Visa att ekvationen $\cos(x - y + z) = y \ln x + z$ implicit definierar en funktion $z = f(x, y)$ i en omgivning av punkten (1,2,1). Bestäm sedan Taylorpolynomet av första ordningen till $f(x, y)$ i punkten $(1, 2)$. (6p)

Lösning/Bevis: Sätt $F(x, y, z) = \cos(x - y + z) - y \ln x - z$. Vi har

$$F_3(x, y, z) = -\sin(x - y + z) - 1$$

och speciellt är $F_3(1, 2, 1) = -1 \neq 0$, så det följer av Implicita funktionssatsen att ekvationen $F(x, y, z) = 0$ implicit definierar en funktion $z = f(x, y)$ i en omgivning av punkten (1,2,1). Vidare kan vi beräkna de partiella derivatorna av f genom implicit derivering av ekvationen $F(x, y, f(x, y)) = 0$. Deriverar vi båda led m.a.p. x så får vi

$$F_1(x, y, f(x, y)) + F_3(x, y, f(x, y))f_1(x, y) = 0 \Leftrightarrow f_1(x, y) = -\frac{F_1(x, y, f(x, y))}{F_3(x, y, f(x, y))}$$

Vi har

$$F_1(x, y, z) = -\sin(x - y + z) - \frac{y}{x}$$

och speciellt är $F_1(1, 2, 1) = -2$, så $f_1(1, 2) = -\frac{F_1(1,2,1)}{F_3(1,2,1)} = -\frac{-2}{-1} = -2$

Genom att derivera båda led i ekvationen $F(x, y, f(x, y)) = 0$ m.a.p. y så får vi på liknande sätt att;

$$f_2(x, y) = -\frac{F_2(x, y, f(x, y))}{F_3(x, y, f(x, y))}$$

Vi har

$$F_2(x, y, z) = \sin(x - y + z) - \ln x$$

och speciellt är $F_2(1, 2, 1) = 0$, så $f_2(1, 2) = -\frac{F_2(1,2,1)}{F_3(1,2,1)} = 0$

Taylorpolynomet av första ordningen till $f(x, y)$ i punkten $(1, 2)$ är därför $p_1(x, y) = f(1, 2) + f_1(1, 2)(x - 1) + f_2(1, 2)(y - 2) = 1 - 2(x - 1) = 3 - 2x$

Svar: Taylorpolynomet är $3 - 2x$

6. Avgör om följande ekvationssytem har någon lösning; (6p)

$$\begin{cases} x^3 + 3x + y^3 + 3y = 4 \\ 2x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases}$$

(Tips: undersök största och minsta värde av funktionen $x^3 + 3x + y^3 + 3y$ under bivillkoret $2x^2 + 2y^2 = 1$)

Lösning: Låt oss undersöka största och minsta värde av funktionen $f(x, y) = x^3 + 3x + y^3 + 3y$ under bivillkoret $g(x, y) = 1$, där $g(x, y) = 2x^2 + 2y^2$. Eftersom bivillkoret beskriver en sluten kurva (en cirkel) i $\mathbb{R}^2$ så kan vi direkt säga att det åtminstone finns ett största och ett minsta värde. Dessa värden antas i punkter (x, y) för vilket det finns något λ sådan att (x, y, λ) är en kritisk punkt till Lagrangefunktionen $L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$. Vi söker därför lösningarna på följande ekvationssystem;

$$\begin{cases} 3x^2 + 3 &= \lambda 2x & (ekv.1) \\ 3y^2 + 3 &= \lambda 2y & (ekv.2) \\ x^2 + y^2 &= \frac{1}{2} & (ekv.3) \end{cases}$$

Om vi dels subtraherar andra ekvationen från den första, dels adderar de två ekvationerna så får vi

$$\begin{cases} 3(x^2 - y^2) = \lambda 2(x - y) \\ 3(x^2 + y^2) + 6 = \lambda 2(x + y) \\ x^2 + y^2 = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(x - y)(x + y) = \lambda 2(x - y) \\ 3 \cdot \frac{1}{2} + 6 = \lambda 2(x + y) \\ x^2 + y^2 = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = y \\ 3 \cdot \frac{1}{2} + 6 = \lambda 4x \\ 2x^2 = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{eller} \quad \begin{cases} 3(x + y) = 2\lambda \quad x \neq y \\ 3 \cdot \frac{1}{2} + 6 = 3(x + y)^2 \\ x^2 + y^2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Ekvationen $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$ medför att både $|x| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ och $|y| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$. Således är $(x + y)^2 \leq (|x| + |y|)^2 \leq 2$. Alltså har det andra av de två alternativa systemen ovan ingen reell lösning.

Det första av dem har lösningarna $x = y = \pm\frac{1}{2}$. Det finns alltså två kritiska punkter till Lagrangefunktionen: $(x, y) = \pm(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ (då vi bortser från λ). Vi har $f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{13}{4}$ och $f(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = -\frac{13}{4}$, så f antar endast värden mellan $-\frac{13}{4}$ och $\frac{13}{4}$, under bivillkoret $g(x, y) = 1$. Speciellt antar f aldrig värdet 4 under bivillkoret, vilket alltså innebär att ekvationssystemet i uppgiften saknar lösning.

Svar: Ekvationssystemet saknar lösning

7. Visa att följande identiteter gäller för alla glatta vektorfält $\mathbf{F} = \mathbf{i}F_1 + \mathbf{j}F_2 + \mathbf{k}F_3$ och funktioner $\phi(x, y, z)$ (som vanligt är ∇ nablaoperatorn $\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$ och symbolerna $\bullet$ och $\times$ betecknar skalärprodukt resp. vektorprodukt). (6p)

(a) $\nabla \bullet (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$

Bevis: Se Sats 16.2.3g, sid 859, med bevis på sid 860.

(b) $\nabla \times (\nabla \phi) = \mathbf{0}$

Bevis: Se Sats 16.2.3h, sid 859. Bevis finns ej i boken men verifieras enkelt;

$$\nabla \times (\nabla \phi) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 \end{vmatrix} = \underbrace{(\phi_{32} - \phi_{23})}_{\equiv 0}\mathbf{i} - \underbrace{(\phi_{31} - \phi_{13})}_{\equiv 0}\mathbf{j} + \underbrace{(\phi_{21} - \phi_{12})}_{\equiv 0}\mathbf{k} \equiv \mathbf{0}$$

Anonym kod	Lösningsförslag till TMA043/MVE085 090828	sid.nummer	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Bestäm gradienten till funktionen $f(x,y) = xy^2$ i punkten $\mathbf{p} = (2,5)$. Bestäm också riktningsderivatan av funktionen f i punkten $\mathbf{p}$ och i riktningen $\mathbf{v} = \frac{3}{5}\mathbf{i} - \frac{4}{5}\mathbf{j}$. (2p)

Lösning: Vi har $\nabla f(x,y) = f_1(x,y)\mathbf{i} + f_2(x,y)\mathbf{j} = y^2\mathbf{i} + 2xy\mathbf{j}$
och speciellt är $\nabla f(2,5) = 25\mathbf{i} + 20\mathbf{j}$.
Vidare har vi att $D_\mathbf{v} f(5,2) = \nabla f(5,2)\bullet\mathbf{v} = (25\mathbf{i}+20\mathbf{j})\bullet(\frac{3}{5}\mathbf{i} - \frac{4}{5}\mathbf{j}) = \frac{75}{5} - \frac{80}{5} = -1$
Svar: Gradienten av f i p är $25\mathbf{i} + 20\mathbf{j}$ och riktningsderivatan i riktningen $\mathbf{v}$ är -1

(b) Uttryck $\frac{\partial}{\partial x} f(2x+y, xy)$ och $\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(2x+y, xy)$ i de partiella derivatorna av f (3p)

Lösning: Sätt $u(x,y) = 2x+y$ och $v(x,y) = xy$. Kedjeregeln ger att;
$\frac{\partial}{\partial x} f(u,v) = f_1(u,v)\frac{\partial u}{\partial x} + f_2(u,v)\frac{\partial v}{\partial x} = 2f_1(u,v) + yf_2(u,v)$ och en derivering till ger

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(u,v) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x} f(u,v)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(2f_1(u,v) + yf_2(u,v)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(2f_1(u,v)\right) +$$
$$+\frac{\partial}{\partial x}\left(yf_2(u,v)\right) = 2f_{11}(u,v)\frac{\partial u}{\partial x} + 2f_{12}(u,v)\frac{\partial v}{\partial x} + yf_{21}(u,v)\frac{\partial u}{\partial x} + yf_{22}(u,v)\frac{\partial v}{\partial x} =$$
$$4f_{11}(u,v) + 2yf_{21}(u,v) + 2yf_{12}(u,v) + y^2 f_{22}(u,v) = 4f_{11}(u,v) + 4yf_{12}(u,v) + y^2 f_{22}(u,v)$$

Svar: $\frac{\partial}{\partial x} f(2x+y,xy) = 2f_1(2x+y,xy) + yf_2(2x+y,xy)$ och
$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(2x+y,xy) = 4f_{11}(2x+y,xy) + 4yf_{21}(2x+y,xy) + y^2 f_{22}(2x+y,xy)$

(c) Bestäm differentialen df av funktionen $f(x,y) = \sin(2x-y)$ i punkten $(1,2)$ och använd differentialen för att beräkna $f(1.1, 1.9)$ approximativt. (3p)

Lösning: $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 2\cos(2x-y)dx - \cos(2x-y)dy$.
Speciellt i punkten $(1,2)$ är $df = 2dx - dy$, och med $dx = 0.1, dy = -0.1$ får vi att;
$f(1.1,1.9) = f(1,2) + \Delta f \approx f(1,2) + df = 0 + 2\cdot 0.1 - (-0.1) = 0.3$
Svar: $df = 2dx - dy$ och $f(1.1,1.9) \approx 0.3$

(d) Beräkna den generaliserade dubbelintegralen $\iint_T \frac{y}{\sqrt{x}}\,dxdy$, där T är triangelområdet med hörn i $(0,0), (0,1)$ och $(1,1)$. (3p)

Lösning:
$$\iint_T \frac{y}{\sqrt{x}}\,dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^y \frac{y}{\sqrt{x}}\,dx\right) dy = \int_0^1 y\left[2\sqrt{x}\right]_0^y dy = \int_0^1 2y^{3/2}\,dy = \left[\frac{4}{5}y^{5/2}\right]_0^1 = \frac{4}{5}$$
Alternativt;
$$\iint_T \frac{y}{\sqrt{x}}\,dxdy = \int_0^1 \left(\int_x^1 \frac{y}{\sqrt{x}},dy\right) dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\left[\frac{y^2}{2}\right]_x^1 dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{x^{3/2}}{2}\right) dx =$$
$$= \left[\sqrt{x} - \frac{x^{5/2}}{5}\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$
Svar: $\iint_T \frac{y}{\sqrt{x}}\,dxdy = \frac{4}{5}$

(e) Beräkna volymen av området Ω som beskrivas av olikheterna $z \geq \sqrt{x^2+y^2}$ och $x^2+y^2+z^2 \leq 4$, genom att beräkna $\iiint_\Omega dxdydz$ med hjälp av sfärisk substition. (3p)

Lösning:

Sfärisk substition $\begin{cases} x = r\sin\phi\cos\theta \\ y = r\sin\phi\sin\theta \\ z = r\cos\phi \end{cases}$ ger att; $\iiint_\Omega dxdydz = \int_0^2\int_0^{\pi/4}\int_0^{2\pi} r^2\sin\phi\,d\theta d\phi dr =$

$$= \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^2 \left[-\cos\phi\right]_0^{\pi/4} \left[\theta\right]_0^{2\pi} = \frac{16\pi}{3}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$
Svar: Volymen är $\frac{16\pi}{3}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$