Tentamen i Matematik M1 del B 950116 kl 08.45–12.45.

Salar: MN,
Hjälpmedel: Formelblad (delas ut). Ej räknedosa.
Telefon: Erik Burman 5310

För godkänt krävs dels minst 14 poäng på de tre bäst belönade problemen (1–6), dels minst 20 poäng totalt.
OBS! Skriv linje, inskrivningsår, namn och personnummer på skrivningsomslaget. Skriv personnummer på samtliga inlämnade blad.

---

1. Lös ekvationen $z^2 + \sqrt{2}z + 2 = 2j$. Ange rötterna på formen $a + jb$. (5p)

2. Låt $f(x) = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{1}{4x}$.

   (a) Beräkna längden av kurvan $C : y = f(x), \dfrac{1}{2} \le x \le 1$. (4p)

   (b) Bestäm kurvan C:s krökning för $x = 1$ (2p)

   (c) Bestäm kurvan C:s minsta krökningsradie. (3p)

3. Lös differentialekvationen $(D^3 - D^2 + 2D - 2)y = 2 + 2x - 4x^2$. (6p)

4. Bestäm den ortogonala kurvskaran till kurvskaran $y = C\sin(x)$ (6p)

5. Lös begynnelsevärdesproblemet
   $$\begin{cases} y'' + 2y' + 2y = e^{-t}\theta(t) \\ y(0-) = 0, \quad y'(0-) = 0 \end{cases}$$ (6p)

6. En reningsanläggning består av två lika stora tankar med efterföljande filter. Förorenad vätska pumpas in i den första tanken. Vätskan pumpas vidare genom ett reningsfilter till den andra tanken, därifrån genom ytterligare ett filter ut i en recipient, en sjö. Alla pumparna ger exakt samma flöde $r\ m^3/s$ och vätskevolymen i de två tankarna är hela tiden densamma $V\ m^3$. Varje filter tar bort exakt hälften av föroreningarna. Vid normal drift är föroreningshalten i tillflödet och i den första tanken 8%. Halten i den andra tanken är 4% och halten i utflödet 2%. Vid ett tillfälle måste det första filtret kopplas bort och vätska med 8% förorening ledas direkt till den andra tanken. Efter hur lång tid har föroreningshalten stigit från 2% till 3% i utloppet till recipienten? (Förutsatt att vätskan i tanken alltid är perfekt blandad.) (6p)

7. (a) Formulera Taylors formel. Under vilka förutsättningar gäller den? (2p)

   (b) Formulera Maclaurins formel. (2p)

   (c) Har funktionen $f(x) = x^{5/2}$ någon maclaurinutveckling? Finns det i så fall någon gräns för resttermens ordning? (2p)

   (d) Bevisa Taylors formel med restterm av ordning 3. (3p)

8. Låt T vara skiftoperatorn för talföljder, $Ty_n = y_{n+1}$. Visa att om $P(r)$ är ett polynom av grad ≥ 3, $r = 1$ är rot av multiplicitet 3 till ekvationen $P(r) = 0$ och $q(n)$ är ett polynom av grad högst 2, så är talföljden $y_n = q(n)$ lösning till differensekvationen $P(T)y_n = 0$ (3p)

Lycka till!
Carl-Henrik