Tentamen i Matematik M1 del B 950420 kl 08.45–12.45.

Salar: MN,
Hjälpmedel: Formelblad (delas ut). Ej räknedosa.
Telefon: Samuel Bengmark 5302

För godkänt krävs dels minst 14 poäng på de tre bäst belönade problemen (1–6), dels minst 20 poäng totalt.
OBS! Skriv linje, inskrivningsår, namn och personnummer på skrivningsomslaget. Skriv personnummer på samtliga inlämnade blad.

---

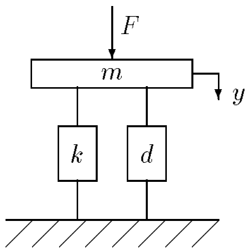
1. Lös differentialekvationen
$$\begin{cases} (1+x^2)y' - 2xy = 1 + x^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$ (6p)

2. Talföljden $y_n = \sum_{k=0}^{n} 6(nk - k^2)$ satisfierar differensekvationen
$$\begin{cases} y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n = 6n + 6, \\ y_0 = 0, \ y_1 = 0 \end{cases}.$$
Utnyttja detta för att bestämma y_n (6p)

3. Kurvan $y = f(x)$ går genom punkten $(2, 2)$ och är sådan att kurvans tangent i punkten (x, y) skär x-axeln i punkten $(x^2, 0)$.
Visa att $f(x)$ är lösning till differentialekvationen $x(x-1)y' + y = 0$.
Bestäm $f(x)$. (8p)

4. Den algebraiska ekvationen $4z^5 - 4z^4 + 9z^3 - 39z^2 + 55z - 25 = 0$ har roten $1 + \frac{j}{2}$. Bestäm samtliga rötter till ekvationen. (6p)

5. Vidstående figur illustrerar en dämpad svängare, där massan m är förbunden med underlaget via en fjäder med fjäderkonstant k och en dämpare med dämpningskonstant d.
Massan påverkas av en kraft $F(t)$. Avvikelsen från jämviktsläget är $y(t)$. Rörelseekvationen för massan är då $my''(t) + dy'(t) + ky(t) = F(t)$.
För $t < 0$ är $F(t) = 0$ och massans rörelse ges av
$y(t) = -e^{-2t}\cos(t)$.
Vid tiden $t = 0$ ges massan en stöt med impulsen 1, samtidigt appliceras en konstant kraft 2 (N).
Detta betyder att $F(t) = \delta(t) + 2\theta(t)$.
Bestäm $y(t)$ för $t > 0$ om $m = 1, \ d = 4, \ k = 13$. (6p)



6. Avgör för vilka tal k som följande gränsvärde existerar:
$$\lim_{x \to 0} \frac{(\sin x)^2 - \tan(x^2)}{x^k}$$
Beräkna gränsvärdet för dessa k. (6p)

7. Du har lärt dig tre sätt att presentera en plan kurva, Cartesisk form — $(x, y) = (x(t), y(t))$, Komplex form — $z = z(t)$, där alltså z är ett komplext tal, samt polär form — $r = r(v)$.
   (a) Vad finns det för samband mellan dessa? Kan alla plana kurvor presenteras på all tre sätten?
   (b) För det mesta är $(x'(t_0), y'(t_0))$ en tangentvektor till kurvan $(x, y) = (x(t), y(t))$ i punkten $(x(t_0), y(t_0))$. Visa det!
   Vilka förutsättningar måste gälla?
   Hur bestämmer man en tangentvektor till en kurva på komplex respektive polär form?

VÄND !!

(c) Om en kurva $(x, y) = (x(t), y(t))$ är en partikelbana och t är tiden så kallar man $(x'(t), y'(t))$ partikelns hastighetsvektor och $|(x'(t), y'(t))|$ partikelns fart. Motivera detta!

Ge argument för alla dina svar! (6p)

8. Betrakta en tredje ordningens linjär differentialekvation med konstanta koefficienter
$a_3y'''(t) + a_2y''(t) + a_1y'(t) + a_0y(t) = f(t)$.

   (a) Vad är den karakteristiska ekvationen till differentialekvationen?

   (b) Antag att differentialekvationens karakteristiska ekvation har en dubbelrot r_1 och en enkelrot r_2. Antag också att $f(t) = 0$. Hur ser den allmänna lösningen till differentialekvationen i så fall ut? Bevisa att det du kallar allmän lösning satisfierar differentialekvationen!

   (c) Antag att ingen av rötterna r_1 och r_2 är 0. Visa att om $f(t)$ är ett polynom så finns exakt ett polynom som är partikulärlösning till differentialekvationen. !

(6p)

Lycka till!
Carl-Henrik