Tentamen i Matematik M1/MX1 del B 950901 kl 08.45–12.45.

Salar: MN,
Hjälpmedel: Formelblad (delas ut). Ej räknedosa.
Telefon: Niklas Ericsson 5319

För godkänt krävs dels minst 14 poäng på de tre bäst belönade problemen (1–6), dels minst 20 poäng totalt.
OBS! Skriv linje, inskrivningsår, namn och personnummer på skrivningsomslaget. Skriv personnummer på samtliga inlämnade blad.

---

1. Lös ekvationen $z^2 - 3(1+j)z + 5j = 0$ (6p)

2. Lös differentialekvationen $3(x^2+5x+6)y' = y^2 + 5y + 4, \quad y(1) = 2$ (6p)

3. (a) Lös differentialekvationen $y'' + 4y' + 5y = \sin(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$ (4p)
   (b) Lös differensekvationen $y_{n+2} + 4y_{n+1} + 4y_n = n2^n, \quad y_0 = 0, \quad y_1 = -1$ (4p)

4. Beräkna gränsvärdet $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{\sin^2 x} - \sqrt{1+2x^2}}{x^4}$ (6p)

5. Betrakta spiralen som i komplexa z-planet parametriseras genom $z = e^{(1+j)t}$, för $0 \le t \le 2\pi$. På denna spiral är en tråd lindad. Tråden lindas av med början i punkten $(1,0)$. Den avlindade tråden hålls sträckt varvid den fria trådänden kommer att följa en kurva $z = w(t)$ i det komplexa z-planet. Bestäm funktionen $w(t)$. (6p)

6. Tangenten till kurvan $y = f(x)$ i punkten $(x_0, f(x_0)) \quad 0 < x_0 \le 1$, skär y-axeln i punkten $(0, \int_{x_0}^{1} \sqrt{1+(f'(x))^2}dx)$. Bestäm $f(x)$ för $0 < x \le 1$ då $f(1) = 0$. (6p)

7. Vilken/vilka av följande differentialekvationer är linjär(a)?
   För vilken/vilka av de linjära kan man använda karakteristiska ekvationen för att bestämma allmänna lösningen?
   Motivera dina svar. Formulera den/de satser du utnyttjar. Visa gärna konkret att det du kallar allmänna lösningen verkligen satisfierar ekvationen.

   (a) $y'' + 5xy' + 6x^2y = 0$
   (b) $2xy'y'' - 3x^2y^2 - 2y = 0$
   (c) $y'' + 5y' + 6y = 0$

   (6p)

8. Algebrans fundamentalsats säger att varje algebraisk ekvation, $p(z) = 0$, där $p(z)$ är ett polynom, har minst en komplex rot. Utnyttja detta för att visa att om $p(z)$ är ett polynom av grad n så har ekvationen $p(z) = 0$ exakt n rötter då dessa räknas med multiplicitet. Formulera och bevisa den/de satser (utöver algebrans fundamentalsats) du utnyttjar. (6p)

Lycka till!
Carl-Henrik