Matematiska Institutionen
Chalmers Tekniska Högskola

Tentamen i Matematik för M1, Matematisk analys i en variabel, del B, 960115, kl 8.45 – 12.45.

Salar: MN **Kurs:** TMA081 (OBS! EJ TMA080 Matematik M del B -94/95)
Hjälpmedel: Formelblad på baksidan. Ej räknedosa.
Telefon: Thomas Hansson 5303

För godkänt krävs dels minst 12 poäng på de tre bäst belönade uppgifterna, dels minst 20 poäng totalt.
OBS! Skriv linje, inskrivningsår, namn och personnummer på skrivningsomslaget. Skriv personnummer på samtliga inlämnade blad.

1. (a) Bestäm y_{1000} då $4y_{n+2} - y_{n+1} - 3y_n = 14$, $\quad y_0 = -4$ och $y_1 = -2$. (4p)
   (b) Bestäm $y(1)$ då $4y''(x) - y'(x) - 3y(x) = 3x + 4$, $\quad y(0) = 0$ och $y'(0) = 0$. (4p)

2. Kurvan $y = f(x)$ är sådan att tangenten i punkten (x, y) går genom punkten $(-x^2, y^2)$.
   (a) Visa att $f(x)$ är lösning till differentialekvationen $(x^2 + x)y' = y - y^2$ (3p)
   (b) Bestäm $f(x)$ om $f(1) = -1$. (3p)

3. Beräkna gränsvärdet $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(\sin(x)) - x}{x^3}$. (6p)

4. I följande system av differentialekvationer är $x = x(t)$ och $y = y(t)$,
   $$\begin{cases} x' &= 2x + y \\ y' &= 3x + 4y \end{cases}$$
   (a) Lös ekvationssystemet med eliminationsmetoden. (3p)
   (b) Lös ekvationssystemet med matrismetoden (egenvärdesmetoden). (3p)

5. På en ö finns rävar och kaniner. Kaninerna är byten för rävarna som givetvis äter andra smådjur också. I medeltal tar varje räv 0.3 kaniner per månad. En del kaniner dör av exvis ålder, dessutom föds alltid nya kaniner. Om inga kaniner blev rävföda så skulle antalet kaniner öka med 10% varje månad. Låt antalet rävar månad n vara r_n och antalet kaniner vara k_n. Då är alltså $k_{n+1} = 1.1k_n - 0.3r_n$.

   Även antalet rävar förändras. Om inga kaniner fanns skulle rävantalet minska med 60% varje månad. Varje kanin gör att i medeltal ytterligare 0.2 rävar överlever.

   Ställ upp ett system av differensekvationer som beskriver situationen ovan och bestäm k_n och r_n om $k_0 = 100$ och $r_0 = 10$. Bestäm också $\lim_{n\to\infty} k_n$ och $\lim_{n\to\infty} r_n$. (6p)

6. Antag att ett kar har formen av ett rätblock, parallellepiped, med höjd H (m) och basarea A (m^2). Vid tidpunkten $t = 0$ innehåller karet V_0 (m^3) vatten. För $t > 0$ rinner vatten in i karet med flödet r (m^3/s) samtidigt som vatten strömmar ut genom ett rör i botten. Detta rörs tvärsnittsarea är a (m^2). Då vatten rinner ut ur ett kar via ett kort rör i botten av karet så ges strömningshastigheten v (m/s) enligt en enkel strömningsmodell av $v^2 = 2gh$, där g är gravitationskonstanten och h är höjden (m) av vätskepelaren ovanför röret. Utnyttja detta för att ge en differentialekvation med vars hjälp man kan bestämma hur mycket vatten det är i karet för $t > 0$. Under vilka förutsättningar kommer volymen att öka respektive minska. Töms karet? Svämmar det över? (6p)

7. Betrakta en andra ordningens linjär differentialekvation med konstanta koefficienter
   $my''(t) + 2d\omega y'(t) + \omega^2 y(t) = f(t)$, $\quad d \neq 0$, $\quad \omega \neq 0$.
   (a) Vad är den karakteristiska ekvationen till differentialekvationen?
   (b) Antag att $f(t) = 0$. Hur ser den allmänna lösningen till differentialekvationen i så fall ut? Bevisa att det du kallar allmän lösning satisfierar differentialekvationen!
   (c) Låt $f(t) = a\cos(t) + b\sin(t)$. Vilken ansats skulle du göra för att hitta en partikulärlösning till differentialekvationen? Bevisa att den ansatsen alltid fungerar. (6p)

8. Förklara hur du skulle bestämma den ortogonala kurvskaran till kurvskaran $Cx = x^2 + y^2$. Motivera de olika stegen. Förklara också hur du skulle bestämma en kurvskara som skär kurvorna $Cx = x^2 + y^2$ under vinkeln θ där $\tan(\theta) \neq k\pi/2$. Motivera de olika stegen även i detta fall. (6p)

Lycka till!
Carl-Henrik

Integralkatalog

$$
\begin{array}{llll}
\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad a \neq -1 & & \int \frac{1}{x} dx = \ln x + C & \\
\int \sin x dx = -\cos x + C & & \int \cos x dx = \sin x + C & \\
\int \frac{1}{cos^2 x} dx = \tan x + C & & \int \frac{1}{sin^2 x} dx = -\cot x + C & \\
\int e^x dx = e^x + C & & \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad 0 < a \neq 1 & \\
\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C & & \int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C \quad a \neq 0 & \\
\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C & & \int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C \quad a \neq 0 &
\end{array}
$$

$$
\begin{cases}
\int \frac{1}{(x^2+1)^n} dx = I_n \\
I_{n+1} = \frac{x}{2n(x^2+1)^n} + \frac{2n-1}{2n} I_n
\end{cases}
$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + x^n o(1)$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + x^{2m} o(1)$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + x^{2m+1} o(1)$$

$$(1+x)^p = \sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k} x^k + x^n o(1) \qquad |x| < 1$$

$$\ln(1-x) = \sum_{k=1}^{n} -\frac{x^k}{k} + x^n o(1) \qquad 1 \leq x < 1$$

$$\arctan x = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{2k-1} + x^{2n} o(1) \qquad |x| \leq 1$$

$$\binom{p}{k} = \frac{p(p-1)(p-2)\ldots(p-k+1)}{k(k-1)(k-2)\ldots 1}$$