Matematiska Institutionen
Chalmers Tekniska Högskola

Tentamen i Matematik för M1/MX1, Matematisk analys i en variabel, del B, 961216, kl 8.45 – 12.45.

Salar: MN **Kurs:** TMA081 och TMA541 (OBS! EJ TMA080 Matematik M del B -94/95)
Hjälpmedel: Formelblad på baksidan. Ej räknedosa.
Telefon: Patrik Lundström 5325

För godkänt krävs dels minst 12 poäng på de tre bäst belönade uppgifterna, dels minst 20 poäng totalt.
OBS! Skriv linje, inskrivningsår, namn och personnummer på skrivningsomslaget. Skriv personnummer på samtliga inlämnade blad.

---

1. Beräkna arean av området som avgränsas av kurvan $y = \dfrac{1}{4e^x - e^{-x}}$, y-axeln och
   (a) x-axeln för $0 \le x \le \ln 4$ samt linjen $x = \ln 4$. (6p)
   (b) hela positiva x-axeln. (2p)

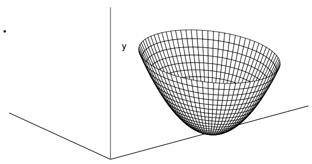
2. Lös följande differentialekvationer.
   (a) $(x+3)y' - y = x$, $y(-2) = 0$. (3p)
   (b) $(x+3)y' - y = y^2$, $y(0) = 1$. (3p)

3. Beräkna gränsvärdet $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x^2} - \cos x}{x(x - \sin x)}$ (6p)

4. Lös differentialekvationen $y^{(4)} + 2y''' - 2y' - y = e^{-x}$ (6p)

5. Två konkurrerande djurarter, x och y, lever inom samma område. Antalet x-djur år n är x_n, antalet y-djur är y_n. Båda arterna har samma fortplantningscykel och -framgång. Utan konkurrens skulle båda arterna öka med 20% per år men på grund av konkurrensen dödar 80% av y-djuren ett x-djur varje under det att 20% av x-djuren dödar ett y-djur per år. Antalet djur satisfierar då följande ekvationssystem.
   $$\begin{cases} x_{n+1} &= 1.2x_n - 0.8y_n \\ y_{n+1} &= -0.2x_n + 1.2y_n \end{cases}$$
   Bestäm x_n och y_n om $x_0 = 100$ och $y_0 = 40$. Kommer någon art att dö ut? (6p)

6. En behållare fylld med vatten har formen av en rotations-. kropp som bildas då en kurva $r = r(y)$, $0 \le y \le H$, roterar kring y-axeln. Vattnet rinner ut genom ett hål i botten av behållaren. Utströmningen antas vara sådan att Torricellis lag gäller så utströmningshastigheten är $k\sqrt{y}$ m^3/s. Bestäm hur lång tid det tar för vattnet att rinna ut. Svara med en integral. (6p)



7. Redogör för hur man löser en linjär differentialekvation med konstanta koefficienter, $y''(t) + ay'(t) + by(t) = h(t)$ om man känner en partikulärlösning. Hur ser allmänna lösningen ut? Bevisa att det du kallar allmän lösning satisfierar differentialekvationen. (6p)

8. Formulera och bevisa analysens huvudsats. (6p)

Lycka till!
Carl-Henrik