Matematiska Institutionen
Chalmers Tekniska Högskola

Tentamen i Matematik för M1/MX1,
Matematisk analys i en variabel, del B,
970822, kl 08.45 – 12.45.

Salar: MN **Kurs:** TMA081/TMA541 (OBS! EJ TMA080 Matematik M del B -94/95)
Hjälpmedel: Formelblad på baksidan. Ej räknedosa.
Telefon: Fredrik Abrahamsson 5341

För godkänt krävs dels minst 12 poäng på de tre bäst belönade uppgifterna, dels minst 20 poäng totalt.
OBS! Skriv linje, inskrivningsår, namn och personnummer på skrivningsomslaget. Skriv personnummer på samtliga inlämnade blad.

1. (a) Bestäm lösningen till $(x^2+1)y' = x(y+1), \quad y(1) = 3.$ (4p)
   (b) Bestäm allmänna lösningen till $x_{n+3} - 7x_{n+1} - 6x_n = 12n - 8.$ (4p)
2. Beräkna $\displaystyle\int_4^\infty \frac{(14x+18)dx}{x^3-7x-6}$ (6p)
3. Lös differentialekvationen $y^{(3)} - 7y' - 6y = e^{-x} + x$ (6p)
4. Kurvan $y = f(x)$ är sådan att tangenten i punkten $(x, f(x))$ går genom punkten $(x + \cot x, \dfrac{1}{\sin x} + \dfrac{1}{\cos x})$. Kurvan går genom punkten $(0, 1)$.
   Bestäm $f(x)$ för $-\pi/2 < x < \pi/2$. (6p)
5. Bestäm Maclaurinpolynomet av grad 4 till funktionen $\dfrac{\sqrt{1+\sin 2x}}{\cos x}$. (6p)
6. Två tankar, tank 1 och tank 2, innehåller från början 1000 liter rent vatten vardera. Mellan de två tankarna går två rör i vilka vätska kan pumpas från tank1 till tank 2 och omvänt. Vid en viss tidpunkt, $t = 0$, börjar man till tank 1 tillföra 3% -ig saltlösning med en hastighet av 50 l/min. Samtidigt förs den perfekt blandade vätskan från tank 1 till tank 2 med en hastighet av 90 l/min. Från tank 2 pumpas den där perfekt blandade vätskan dels tillbaka till tank 1 med en hastighet av 40 l/min, dels ut i avloppet med en hastighet av 50 l/min. Bestäm saltmängden i respektive tank vid tidpunkten $t > 0$. (6p)
7. Formulera och bevisa insättningsformeln för bestämda integraler. (6p)
8. En kurvskara har ekvationen $f(x) + g(y) = C$. Härled differentialekvationen dels för den ortogonala kurvskaran, dels för den kurvskara som skär den givna kurvskaran under vinkeln θ där $\theta \neq \pm\frac{\pi}{2}$. (6p)

Lycka till!
Carl-Henrik

VÄND!

Formelblad för Envariabelanalys för M1/MX1 1996/97.

Trigonometri.

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}$$

Integralkatalog

$$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad a \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{cos^2 x}dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{sin^2 x}dx = -\cot x + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad 0 < a \neq 1$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C \quad a \neq 0$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}dx = \ln|x+\sqrt{x^2+a}| + C \quad a \neq 0$$

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+a} + a\ln|x+\sqrt{x^2+a}|) + C$$

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^n}dx = I_n$$

$$I_{n+1} = \frac{x}{2n(x^2+1)^n} + \frac{2n-1}{2n}I_n$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + x^{n+1}B(x)$$

$$\sin x = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + x^{2n+1}B(x)$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k}\frac{x^{2k}}{(2k)!} + x^{2n+2}B(x)$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + x^{n+1}B(x) \qquad |x| < 1$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}x^k}{k} + x^{n+1}B(x) \qquad 1 \leq x < 1$$

$$\arctan x = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{2k-1} + x^{2n+1}B(x) \qquad |x| \leq 1$$

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k(k-1)(k-2)\ldots 1} \qquad \binom{\alpha}{0} = 1$$