Matematiska Institutionen
Chalmers Tekniska Högskola

Lösningar till skrivning i
Analys i en variabel för M, del B, (TMA081B), 1998-12-14

1. a) Beräkna gränsvärdet $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 x - x^2}{\ln(1+x^2) - x^2}$ (3 p)

b) Funktionen $y(x)$ är lösning till differentialekvationen $e^y + y' + \dfrac{1}{x} = 0$, $y(e) = 0$.
Bestäm Taylorpolynomet av ordning två i punkten $x = e$. (3 p)

Lösning:

a)

$$\frac{\sin^2 x - x^2}{\ln(1+x^2) - x^2} = \frac{\left(x - \frac{x^3}{3!} + x^5 B_1(x)\right)^2 - x^2}{\left(x^2 - \frac{x^4}{2} + x^6 B_2(x)\right) - x^2} =$$

$$= \frac{\frac{-x^4}{3} + x^6 B_3(x)}{\frac{-x^4}{2} + x^6 B_2(x)} = \frac{\frac{-1}{3} + x^2 B_3(x)}{\frac{-1}{2} + x^2 B_2(x)} \to \frac{-1/3}{-1/2} = \underline{\frac{2}{3}}$$

b) Sätter vi in $x = e$ i differentialekvationen och utnyttjar att $y(e) = 0$ så får vi att $y'(e) = -1 - \frac{1}{e}$.
Deriverar vi differentialekvationen får vi $y'e^y + y'' - \dfrac{1}{x^2} = 0$. Sätter vi in $x = e$ i den deriverade ekvationen och utnyttjar att $y(e) = 0$ och $y'(e) = -1 - \frac{1}{e}$, så får vi $y''(e) = 1 + \frac{1}{e} + \frac{1}{e^2}$.
Således är Taylorpolynomet p_2 av ordning två, kring $x = e$, av lösningen $y(x)$, lika med
$p_2(x) = \underline{-\left(1 + \frac{1}{e}\right)(x - e) + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{e} + \frac{1}{e^2}\right)(x - e)^2}$

---

2. a) Beräkna den generaliserade integralen $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x + 1}}\, dx$ (3 p)

b) Beräkna arean av den rotationsyta som bildas då kurvan $y = 2x^2 + 1$, $0 \le x \le 1$, får rotera kring $y-$axeln. (3 p)

Lösning:

a) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x + 1}}\, dx = \lim_{\epsilon\to 0} \int_0^{\pi-\epsilon} \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x + 1}}\, dx = \lim_{\epsilon\to 0} \left[-2\sqrt{\cos x + 1}\,\right]_0^{\pi-\epsilon} = \underline{2\sqrt{2}}$

b) $y = 2x^2 + 1$, $0 \le x \le 1$ $\Leftrightarrow$ $x = \sqrt{\frac{y-1}{2}}$, $1 \le y \le 3$. Rotationsarean =

$$= \int_1^3 2\pi x(y)\sqrt{1 + (x'(y))^2}\, dy = 2\pi \int_1^3 \sqrt{\frac{y-1}{2}} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{y-1}}\right)^2}\, dy =$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_1^3 \sqrt{8y - 7}\, dy = \frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{12}(8y - 7)^{3/2}\right]_1^3 = \underline{\frac{\pi}{24}(17^{3/2} - 1)}$$

anm. alternativt kan vi få rotationsarean på följande, lite mer direkta, sätt;

Rotationsarean $= \displaystyle\int_0^1 2\pi x\, ds = \int_0^1 2\pi x\sqrt{1 + (y'(x))^2}\, dx =$

$$\int_0^1 2\pi x\sqrt{1 + (4x)^2}\, dx = \left[\frac{\pi}{24}(1 + (4x)^2)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{24}(17^{3/2} - 1)$$

3. a) Lös differentialekvationen $x^2y'' + xy' - y = \ln(ex)$, $x > 0$,
genom att göra variabelbytet $x = e^t$. (4 p)

b) Lös differentialekvationen $e^y + y' + \dfrac{1}{x} = 0$, $x > 0$,$y(e) = 0$,
genom att göra funktionsbytet $z = xe^y$. (4 p)

Lösning:

a) Vi har $x = e^t \Leftrightarrow t = \ln x$, s $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt}\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{dy}{dt}\dfrac{1}{x}$ och

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\frac{1}{x}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right)\frac{1}{x} + \frac{dy}{dt}\left(\frac{-1}{x^2}\right) = \frac{d^2y}{dt^2}\frac{dt}{dx}\frac{1}{x} - \frac{dy}{dt}\frac{1}{x^2} = \frac{d^2y}{dt^2}\frac{1}{x^2} - \frac{dy}{dt}\frac{1}{x^2},$$

vilket insatt i differentialekvationen ger;

$$x^2\left(\frac{d^2y}{dt^2}\frac{1}{x^2} - \frac{dy}{dt}\frac{1}{x^2}\right) + x\frac{dy}{dt}\frac{1}{x} - y = \ln(e \cdot e^t) \Leftrightarrow \frac{d^2y}{dt^2} - y = t + 1$$

Karakteristiska ekvationen $r^2 - 1$ har lösningarna $r = \pm 1$, så homogenlösningarna ges av $y_{\text{hom}} = C_1e^t + C_2e^{-t} = C_1x + \frac{C_2}{x}$. Vi ser direkt att $y_{\text{part}} = -t - 1 = -\ln x - 1$ är en parikulärlösning, så den allmänna lösningen på differentialekvationen är
$\underline{y = C_1x + \frac{C_2}{x} - \ln x - 1}$.

b) $z = xe^y \Leftrightarrow y = \ln\dfrac{z}{x}(= \ln z - \ln x)$, så $y' = \dfrac{z'}{z} - \dfrac{1}{x}$,
vilket insatt i differentialekvationen ger;

$$\frac{z}{x} + \frac{z'}{z} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{-z'}{z^2} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{z} = \ln x + C \Leftrightarrow e^{-y} = x(\ln x + C)$$

Villkoret $y(e) = 0$ ger att $1 = e(1 + C)$, dvs. $C = \frac{1}{e} - 1$,
så den allmänna lösningen på differentialekvationen är;

$$\underline{y = -\ln\left(x\left(\ln x + \frac{1}{e} - 1\right)\right)}$$

---

4. I ett nyvädrat rum med volymen $120\,\mathrm{m}^3$ börjar några personer röka. Röken sprider sig i rummet i en takt av 0.01 $\mathrm{m}^3/\mathrm{min}$ och den välblandade rökluften lämnar rummet i samma takt. Röken innehåller $4\,\%$ koloxid. Om människokroppen en längre tid utsätts för påverkan av koloxid med högre koncentration än $0.012\,\%$ anses detta vara skadligt. Hur länge dröjer det innan det börjar bli skadligt att vistas i rummet ? Använd Taylorutveckling för att få ett närmevärde på svaret. (6 p)

Lösning:

Sätt $k(t)$ =Mängden koloxid, i m^3, vid tiden t min.

Då ger informationen i uppgiften differentialekvationen; $k' + \dfrac{0.01}{120}k = 0.01 \cdot 0.04$

Multiplikation med integrerande faktorn $e^{\frac{0.01}{120}t}$ ger den ekvivalenta ekvationen;

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\frac{0.01}{120}t}k\right) = 0.01 \cdot 0.04 \cdot e^{\frac{0.01}{120}t} \Leftrightarrow k = 120 \cdot 0.04 + C \cdot e^{\frac{-0.01}{120}t}$$

Vi har också villkoret $k(0) = 0$ som ger att $C = -120 \cdot 0.04$, så

$k(t) = 120 \cdot 0.04 \cdot \left(1 - e^{\frac{-0.01}{120}t}\right)$. Vi söker nu det t för vilket $\dfrac{k(t)}{120} = 0.00012$.

Sätter vi in det erhållna uttrycket för $k(t)$ får vi $0.04 \cdot \left(1 - e^{\frac{-0.01}{120}t}\right) = 0.00012 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow e^{\frac{-0.01}{120}t} = 1 - \frac{0.00012}{0.04} \Leftrightarrow t = \frac{-120}{0.01}\ln(1 - 0.003) \approx \frac{-120}{0.01}(-0.003) = 120 \cdot 0.3 = 36.$$

Det börjar bli skadligt att vistas i rummet efter $\underline{\dfrac{-120}{0.01}\ln(1 - 0.003)}$ <u>minuter ($\approx$ 36 minuter).</u>

5. Lös följande system av differensekvationer; $\begin{cases} 4x_n + y_{n+1} = 3\cdot 2^{n+1} \\ x_{n+1} + 4y_n = 2 - 15n \end{cases}$ (6 p)

Lösning:

$$\begin{cases} 4x_n + y_{n+1} = 3\cdot 2^{n+1} \\ x_{n+1} + 4y_n = 2 - 15n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x_{n+1} + y_{n+2} = 3\cdot 2^{n+2} \\ 4x_{n+1} + 16y_n = 8 - 60n \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y_{n+2} - 16y_n = 3\cdot 2^{n+2} + 60n - 8 & \text{(ekv.1)} \\ x_n = 2 - 15(n-1) - 4y_{n-1} & \text{(ekv.2)} \end{cases} .$$

Karakteristiska ekvationen till (ekv.1) är $r^2 - 16 = 0$, och har lösningarna $r = \pm 4$.
Så homogenlösningarna till (ekv.1) ges av $y_n^{\text{hom}} = C_1(-4)^n + C_2 4^n$.
Som partikulärlösning ansätter vi $y_n^{\text{part}} = a\cdot 2^n + bn + c$, och får;
$VL = a\cdot 2^{n+1} + b(n+1) + c - 16(a\cdot 2^n + bn + c) = -12a\cdot 2^n - 15bn + 2b - 15c$
För att erhålla $HL = 3\cdot 2^{n+2} + 60n - 8$ i (ekv.1), sätter vi $a = -1, b = -4$ och $c = 0$,
vilket ger den allmänna lösningen $\underline{y_n = C_1(-4)^n + C_2 4^n - 2^n - 4n}$, på (ekv.1).
Detta uttryck på y_n insatt i (ekv.2) ger sedan $\underline{x_n = C_1(-4)^n - C_2 4^n + 2^{n+1} + n + 1}$

---

6. Avgör om integralen $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt{|\sin x|}}{e^{2x}-1}\,dx$ är konvergent eller divergent.
(Utförliga argument krävs) (6 p)

Lösning:

$$0 < x < 1: \quad 0 \le \frac{\sqrt{|\sin x|}}{e^{2x}-1} = \underbrace{\sqrt{\frac{\sin x}{x}}}_{\to 1}\sqrt{x}\,\underbrace{\frac{2x}{e^{2x}-1}}_{\to 1}\frac{1}{2x} \le C_1\sqrt{x}\,C_2\frac{1}{2x} = \frac{C_3}{\sqrt{x}}$$

$$\int_0^1 \frac{C_3}{\sqrt{x}}\,dx \quad \text{konvergent} \Rightarrow \int_0^1 \frac{\sqrt{|\sin x|}}{e^{2x}-1} \quad \text{konvergent}$$

$$1 \le x < \infty: \quad 0 \le \frac{\sqrt{|\sin x|}}{e^{2x}-1} \le \frac{1}{e^{2x}-1} = \frac{1}{(e^x-1)(e^x+1)} \le \frac{1}{(e^1-1)e^x} \le \frac{1}{e^x}$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{e^x}\,dx \quad \text{konvergent} \Rightarrow \int_1^\infty \frac{\sqrt{|\sin x|}}{e^{2x}-1} \quad \text{konvergent}$$

Således är integralen $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt{|\sin x|}}{e^{2x}-1}\,dx$ konvergent.