MATEMATIK **Chalmers tekniska högskola**

Tentamensskrivning i **Matematisk analys i en variabel M, del B**, (TMA081B).
1998-12-14, kl 8.45-12.45, Inga hjälpmedel
Telefonvakt: Patrik Lundström (ankn. 5325)

För godkänt krävs dels minst 12 poäng på de tre bäst belönade uppgifterna, dels minst 20 poäng totalt. Skriv linje, inskrivningsår, namn och personnummer på skrivningsomslaget. Skriv personnummer och sidnummer på samtliga inlämnade blad.

---

1. a) Beräkna gränsvärdet $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 x - x^2}{\ln(1+x^2) - x^2}$ (3 p)

b) Funktionen $y(x)$ är lösning till differentialekvationen $e^y + y' + \dfrac{1}{x} = 0$, $y(e) = 0$.
Bestäm Taylorpolynomet av ordning två i punkten $x = e$. (3 p)

2. a) Beräkna den generaliserade integralen $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x + 1}}\, dx$ (3 p)

b) Beräkna arean av den rotationsyta som bildas då kurvan $y = 2x^2 + 1$, $0 \le x \le 1$,
får rotera kring $y-$axeln. (3 p)

3. a) Lös differentialekvationen $x^2y'' + xy' - y = \ln(ex)$, $x > 0$,
genom att göra variabelbytet $x = e^t$. (4 p)

b) Lös differentialekvationen $e^y + y' + \dfrac{1}{x} = 0$, $x > 0$, $y(e) = 0$,
genom att göra funktionsbytet $z = xe^y$. (4 p)

4. I ett nyvädrat rum med volymen $120\,\mathrm{m}^3$ börjar några personer röka. Röken sprider sig i rummet i en takt av $0.01\ \mathrm{m}^3/\mathrm{min}$ och den välblandade rökluften lämnar rummet i samma takt. Röken innehåller $4\,\%$ koloxid. Om människokroppen en längre tid utsätts för påverkan av koloxid med högre koncentration än $0.012\,\%$ anses detta vara skadligt. Hur länge dröjer det innan det börjar bli skadligt att vistas i rummet ? Använd Taylorutveckling för att få ett närmevärde på svaret. (6 p)

5. Lös följande system av differensekvationer; $\begin{cases} 4x_n + y_{n+1} = 3\cdot 2^{n+1} \\ x_{n+1} + 4y_n = 2 - 15n \end{cases}$ (6 p)

6. Avgör om integralen $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{|\sin x|}}{e^{2x} - 1}\, dx$ är konvergent eller divergent.
(Utförliga argument krävs) (6 p)

7. Givet en kurvskara av typen $\Gamma_C : f(x)g(y) = C$, där f och g är deriverbara funktioner, härled en differentialekvation för den kurvskara som skär kurvskaran Γ_C under en vinkel

a) $\pi/2$ b) $\pi/3$ (6 p)

8. Formulera och bevisa Analysens huvudsats. (6 p)

LYCKA TILL! UTH

Lösningar till tentan anslås på Matematiskt centrum efter tentans slut.

Formelblad för analyskurserna i M1 98/99

Trigonometri.

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}$$

Integralkatalog

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad a \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{cos^2 x} dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{sin^2 x} dx = -\cot x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad 0 < a \neq 1$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C \quad a \neq 0$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C \quad a \neq 0$$

$$\int \sqrt{x^2+a} dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+a} + a\ln|x + \sqrt{x^2+a}|) + C$$

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^n} dx = I_n$$

$$I_{n+1} = \frac{x}{2n(x^2+1)^n} + \frac{2n-1}{2n} I_n$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + x^{n+1}B(x)$$

$$\sin x = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + x^{2n+1}B(x)$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + x^{2n+2}B(x)$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + x^{n+1}B(x) \qquad |x| < 1$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}x^k}{k} + x^{n+1}B(x) \qquad -1 < x \leq 1$$

$$\arctan x = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{2k-1} + x^{2n+1}B(x) \qquad |x| \leq 1$$

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k(k-1)(k-2)\ldots 1} \qquad \binom{\alpha}{0} = 1$$

Övrigt

Tyngdpunkten (x_T, y_T, z_T) för Ω ges av $x_T = \dfrac{\int_\Omega x\rho(x,y,z)\,dxdydz}{\int_\Omega \rho(x,y,z)\,dxdydz}$, analogt för y_T, z_T.

$\rho(x,y,z)$ är densiteten.