Matematiska Institutionen
Chalmers Tekniska Högskola

Lösningar till skrivning i
Analys i en variabel för M, del B, (TMA081B), 1999-04-08

1. Beräkna integralerna

a) $\displaystyle\int_0^1 x(1-x)^9\,dx$ (3 p)

b) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x(\sqrt{x}+x)}\,dx$ (5 p)

Lösning:

a) $$\int_0^1 x(1-x)^9\,dx \overset{P.I.}{=} \left[\frac{-x(1-x)^{10}}{10}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{10}(1-x)^{10}\,dx = \left[\frac{-(1-x)^{11}}{110}\right]_0^1 = \underline{\frac{1}{110}}$$

b) $$\int_1^\infty \frac{1}{x(\sqrt{x}+x)}\,dx = \begin{bmatrix} s=\sqrt{x} \\ s^2 = x \\ 2s\,ds = dx \end{bmatrix} = \int_1^\infty \frac{1}{s^2(s+s^2)}2s\,ds = \int_1^\infty \frac{2}{s^2(1+s)}\,ds \overset{P.B.U.}{=}$$
$$= 2\int_1^\infty \left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{1+s}\right)ds = 2\left[\frac{-1}{s} + \ln\frac{1+s}{s}\right]_1^\infty = \underline{2(1-\ln 2)}$$

---

2. Lös differentialekvationerna

a) $y^{(4)} - y = e^{2x}$ (3 p)

b) $(y'')^2 - 2e^x y' = 0$ (5 p)

Lösning:

a) karakteristiska ekvationen: $r^4 - 1 = 0 \Leftrightarrow r = \pm 1$ eller $r = \pm i$,
så homogenlösningarna har formen $y_h = Ae^x + Be^{-x} + C\cos x + D\sin x$.
Som partikulärlösning ansätter vi $y_p = ae^{2x}$ som efter insättning i diffekv.
ger oss villkoret $16ae^{2x} - ae^{2x} = e^{2x} \Leftrightarrow a = 1/15$, så $y_p = e^{2x}/15$,
varvid den allmänna lösningen på differentialekvationen har utseendet
$\underline{y = Ae^x + Be^{-x} + C\cos x + D\sin x + e^{2x}/15}$.

b) Sätt $u = y'$. Då har vi $(y'')^2 - 2e^x y' = 0 \Leftrightarrow (u')^2 = 2e^x u$.
Vi ser speciellt att en lösning måste uppfylla att $u \geq 0$.
En singulärlösning är $u \equiv 0 \Leftrightarrow \underline{y \equiv C}$, för någon konstant C.
Om $u > 0$ så får vi $du/\sqrt{2u} = e^{x/2}dx \Leftrightarrow \sqrt{2u} = 2e^{x/2} + D$,
varvid $u = (2e^{x/2} + D)^2/2 = 2e^x + 2De^{x/2} + D^2/2$.
Integration ger oss sedan den allmänna lösningen
$\underline{y = 2e^x + 4De^{x/2} + D^2x/2 + E}$, där $D, E \in \mathbb{R}$.

---

3. Funktionen $y(x)$ är lösning till differentialekvationen $y = e^x y' - 1$, y(0)=1.
Bestäm Maclaurinpolynomet av grad 4 till $y(x)$. (4 p)

Lösning: Sätter vi $x = 0$ i ekvationen, får vi $\underbrace{y(0)}_{=1} = e^0 y'(0) - 1$, vilket ger att $y'(0) = 2$

Deriverar vi först båda leden i ekvationen får vi $y' = e^x y' + e^x y''$.
Sätter vi här in $x = 0$ får vi $\underbrace{y'(0)}_{=2} = e^0 \underbrace{y'(0)}_{=2} + e^0 y''(0)$, vilket ger att $y''(0) = 0$.

Deriverar vi båda leden i ekvationen ytterligare en gång, får vi $y'' = e^x y' + 2e^x y'' + e^x y'''$,
varpå $\underbrace{y''(0)}_{=0} = e^0 \underbrace{y'(0)}_{=2} + 2e^0 \underbrace{y''(0)}_{=0} + e^0 y'''(0)$, och därmed $y'''(0) = -2$.

Ytterligare en derivation ger $y''' = e^x y' + 3e^x y'' + 3e^x y''' + e^x y^{(4)}$
varpå $\underbrace{y'''(0)}_{=-2} = e^0 \underbrace{y'(0)}_{=2} + 3e^0 \underbrace{y''(0)}_{=0} + 3e^0 \underbrace{y'''(0)}_{=-2} + e^0 y^{(4)}(0)$, och därmed $y^{(4)}(0) = 2$.

Således är $p_4(x) = y(0) + y'(0)x + \dfrac{y''(0)}{2}x^2 + \dfrac{y'''(0)}{3!}x^3 + \dfrac{y^{(4)}(0)}{4!}x^4 =$
$= \underline{1 + 2x - \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{12}x^4}$ Maclaurinpolynomet av grad 4 till $y(x)$.

4. När cirkeln $(x-2)^2+y^2=1$, roterar kring y-axeln bildas en s.k. torus. Beräkna arean av denna rotationsyta, samt volymen av den rotationskropp som begränsas av denna yta. (6 p)

Lösning:

Låt C_0 och C_1 vara den del av cirkeln $(x-2)^2+y^2=1$, där $x \leq 2$ respektive $x \geq 2$.
Cirkelbågarna C_0 och C_1 kan båda beskrivas med y som parameter,
varpå $x = 2-\sqrt{1-y^2}$ respektive $x = 2+\sqrt{1-y^2}$
Båglängdselementet blir i båda fallen

$$ds = \sqrt{1+(x'(y))^2}dy = \sqrt{1+\frac{y^2}{1-y^2}}dy = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}dy.$$

varpå vi får att; $\underline{\text{Rotationsarean}} = \int_{C_0} 2\pi x\, ds + \int_{C_1} 2\pi x\, ds =$

$$= \int_{-1}^{1} 2\pi(2-\sqrt{1-y^2})\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} + \int_{-1}^{1} 2\pi(2+\sqrt{1-y^2})\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} =$$

$$= 8\pi \int_{-1}^{1} \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 8\pi \left[\arcsin y\right]_{-1}^{1} = \underline{8\pi^2} \quad \text{(a.e.)}$$

Vidare får vi att;

$$\underline{\text{Rotationsvolymen}} = \int_{-1}^{1} \pi(2+\sqrt{1-y^2})^2\, dy - \int_{-1}^{1} \pi(2-\sqrt{1-y^2})^2\, dy =$$

$$= 8\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{1-y^2}\, dy = \begin{bmatrix} y = \sin t \\ dy = \cos t\, dt \end{bmatrix} = 8\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t\, dt =$$

$$= 8\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1+\cos 2t}{2}\, dt = 8\pi \left[\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \underline{4\pi^2} \quad \text{(v.e.)}$$

---

5. Två spelare A och B singlar slant med en krona. A satsar alltid på krona och B alltid på klave. Den som vinner får en tia av den andre. Sannolikheten för krona är p och sannolikheten för klave är $q = 1-p$. Om A har n tior är $x(n)$ sannolikheten för att A skall bli ruinerad. Då gäller följande rekursionsformel: $x(n) = p\,x(n+1)+q\,x(n-1)$
Om vi antar att spelarnas sammanlagda kapital är konstant $= N$ så gäller dessutom att $x(0)=1$ och $x(N)=0$. Bestäm $x(n)$ och $\lim_{N\to\infty} x(n)$. (6 p)

Lösning:

karakteristiska ekvationen: $pr^2 - r + q = 0 \overset{q=1-p}{\Leftrightarrow} (r-\frac{1}{2p})^2 - \frac{1}{4p^2} + \frac{1-p}{p} = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (r-\frac{1}{2p})^2 = (1-\frac{1}{2p})^2 \Leftrightarrow r = \frac{1}{2p} \pm (1-\frac{1}{2p}) \Leftrightarrow r = 1 \text{ eller } r = \frac{1}{p}-1 = \frac{q}{p}.$$

Om $p \neq q$ har vi således; $x(n) = A + B\left(\frac{q}{p}\right)^n$ och

$$\begin{cases} x(0)=1 \\ x(N)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A+B=1 \\ A+B\left(\frac{q}{p}\right)^N = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -\left(\frac{q}{p}\right)^N / \left(1-\left(\frac{q}{p}\right)^N\right) \\ B = 1/\left(1-\left(\frac{q}{p}\right)^N\right) \end{cases}$$

Om $p = q = 1/2$ har vi istället; $x(n) = An+B$, och

$$\begin{cases} x(0)=1 \\ x(N)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=1 \\ AN+B=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-1/N \\ B=1 \end{cases}$$

så $\underline{x(n) = \begin{cases} \frac{\left(\left(\frac{q}{p}\right)^n - \left(\frac{q}{p}\right)^N\right)}{\left(1-\left(\frac{q}{p}\right)^N\right)} & \text{, om } p \neq q \\ 1-n/N & \text{, om } p=q=1/2 \end{cases}}$ och $\underline{\lim_{N\to\infty} x(n) = \begin{cases} 1 & \text{om } p \leq q \\ \left(\frac{q}{p}\right)^n & \text{om } p > q \end{cases}}$

6. Antag att $f(x)$ är en funktion sådan att $f(0) = 0$ och som har kontinuerlig tredjederivata i en omgivning av $x = 0$, och sätt $F(x) = \displaystyle\int_x^{2x} f(t)\,dt$.

Visa att $\quad \displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{F(f(x))}{f(F(x))} = f'(0).$ (6 p)

Lösning:

Eftersom $F(0) = 0$, är gränsvärdet av typen "0/0", varpå vi tar Maclaurinutveckling till hjälp för att undersöka gränsvärdet.
Integralkalkylens huvudsats och kedjeregeln ger att $F'(x) = 2f(2x) - f(x)$, så $F'(0) = f(0) = 0$. Vidare får vi att $F''(x) = 4f'(2x) - f'(x)$, så $F''(0) = 3f'(0)$.
Således har vi $F(x) = 3f'(0)x^2/2 + x^3B(x)$ (Här, liksom i påföljande kalkyler, betecknar $B(x)$ någon begränsad funktion nära $x = 0$).
Men $f(x) = f'(0)x + x^2B(x)$ så
$F(f(x)) = 3f'(0)\left(f'(0)x + x^2B(x)\right)^2/2 + x^3B(x) = 3(f'(0))^3x^2/2 + x^3B(x)$ och
$f(F(x)) = f'(0)\left(3f'(0)x^2/2 + x^3B(x)\right) + x^3B(x) = 3(f'(0))^2x^2/2 + x^3B(x)$
varpå vi får;

$$\lim_{x\to 0}\frac{F(f(x))}{f(F(x))} = \lim_{x\to 0}\frac{3(f'(0))^3x^2/2 + x^3B(x)}{3(f'(0))^2x^2/2 + x^3B(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{f'(0) + xB(x)}{1 + xB(x)} = f'(0)$$