MATEMATIK **Chalmers tekniska högskola**

Tentamensskrivning i **Matematisk analys i en variabel M, del B**, (TMA081B).
1999-04-08, kl 8.45-12.45, Inga hjälpmedel
Telefonvakt: Rolf Liljendahl (ankn. 5301)

För godkänt krävs dels minst 12 poäng på de tre bäst belönade uppgifterna, dels minst 20 poäng totalt. Skriv linje, inskrivningsår, namn och personnummer på skrivningsomslaget. Skriv personnummer och sidnummer på samtliga inlämnade blad.

---

1. Beräkna integralerna

a) $\displaystyle\int_0^1 x(1-x)^9\,dx$ (3 p)

b) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x(\sqrt{x}+x)}\,dx$ (5 p)

2. Lös differentialekvationerna

a) $y^{(4)}-y=e^{2x}$ (3 p)

b) $(y'')^2-2e^xy'=0$ (5 p)

3. Funktionen $y(x)$ är lösning till differentialekvationen $y=e^xy'-1$, y(0)=1.
Bestäm Maclaurinpolynomet av grad 4 till $y(x)$. (4 p)

4. När cirkeln $(x-2)^2+y^2=1$, roterar kring y-axeln bildas en s.k. torus.
Beräkna arean av denna rotationsyta, samt volymen av den rotationskropp som begränsas av denna yta. (6 p)

5. Två spelare A och B singlar slant med en krona. A satsar alltid på krona och B alltid på klave. Den som vinner får en tia av den andre. Sannolikheten för krona är p och sannolikheten för klave är $q=1-p$. Om A har n tior är $x(n)$ sannolikheten för att A skall bli ruinerad. Då gäller följande rekursionsformel: $x(n)=p\,x(n+1)+q\,x(n-1)$
Om vi antar att spelarnas sammanlagda kapital är konstant $=N$ så gäller dessutom att $x(0)=1$ och $x(N)=0$. Bestäm $x(n)$ och $\lim\limits_{N\to\infty} x(n)$. (6 p)

6. Antag att $f(x)$ är en funktion sådan att $f(0)=0$ och som har kontinuerlig tredjederivata i en omgivning av $x=0$, och sätt $F(x)=\displaystyle\int_x^{2x} f(t)\,dt$.

Visa att $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{F(f(x))}{f(F(x))}=f'(0)$. (6 p)

7. Definiera vad som menas med en trappfunktion och ange vad integralen av den är.
Definiera sedan allmänt vad som menas med en (Riemann-)integrerbar funktion och ange ett tillräckligt villkor för att funktionen skall vara integrerbar. (6 p)

8. Vad menas med en linjär differentialekvation av andra ordningen ?
Vad står benämningen "linjär" för ? Vad menas med homogenlösningarna till ekvationen och hur finner man dessa om ekvationen har konstanta koefficienter ?
Vad är en partikulärlösning ? Formulera och bevisa ett påstående om hur man med hjälp av en sådan kan beskriva alla lösningar till en inhomogen linjär differentialekvation. (6 p)

LYCKA TILL! UTH

Lösningar till tentan anslås på Matematiskt centrum efter tentans slut.

Formelblad för analyskurserna i M1 98/99

Trigonometri.

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}$$

Integralkatalog

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad a \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{cos^2 x} dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{sin^2 x} dx = -\cot x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad 0 < a \neq 1$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C \quad a \neq 0$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C \quad a \neq 0$$

$$\int \sqrt{x^2+a} dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+a} + a\ln|x + \sqrt{x^2+a}|) + C$$

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^n} dx = I_n$$

$$I_{n+1} = \frac{x}{2n(x^2+1)^n} + \frac{2n-1}{2n} I_n$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + x^{n+1}B(x)$$

$$\sin x = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + x^{2n+1}B(x)$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + x^{2n+2}B(x)$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} \alpha \\ k \end{pmatrix} x^k + x^{n+1}B(x) \qquad |x| < 1$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}x^k}{k} + x^{n+1}B(x) \qquad -1 < x \leq 1$$

$$\arctan x = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{2k-1} + x^{2n+1}B(x) \qquad |x| \leq 1$$

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ k \end{pmatrix} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k(k-1)(k-2)\ldots 1} \qquad \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

Övrigt

Tyngdpunkten (x_T, y_T, z_T) för Ω ges av $x_T = \dfrac{\int_\Omega x\rho(x,y,z)\, dxdydz}{\int_\Omega \rho(x,y,z)\, dxdydz}$, analogt för y_T, z_T.

$\rho(x,y,z)$ är densiteten.