Lösningar till tentamen i Matematik M1 del B 940407

(CHF)

1. Lös differentialekvationen

$$\begin{cases} (1+x^3)y' - 3x^2y = (x^2-x+1)^2 \\ y(0) = 2 \end{cases}.$$

Lösning:

Div med $(1+x^3)$ ger $y' - \dfrac{3x^2}{(1+x^3)}y = \dfrac{(x^2-x+1)^2}{(1+x^3)}$.

Integrerande faktor: $\displaystyle\int -\frac{3x^2}{(1+x^3)}dx = -ln(1+x^3)$ som ger $IF = 1/(1+x^3)$.

Mult med IF ger $(y/(1+x^3))' = \dfrac{(x^2-x+1)^2}{(1+x^3)^2}$.

Förenklas till $(y/(1+x^3))' = \dfrac{1}{(1+x)^2}$ vilket ger $y = (x^3+1)(\dfrac{-1}{x+1} + C)$. $y(0) = 2$ ger $C = 3$ och $y(x) = 3x^3 - x^2 + x + 2$

2. En partikelbana ges av $(x,y,z) = (\cos 2t, \sin 2t, \sin t)$. Bestäm partikelns hastighet och banans krökningsradie i de punkter där farten är minimal.

Lösning:

Hastighetsvektorn är $(x', y', z') = (-2\sin(2t), 2\cos(2t), \cos(t))$. Farten är absolutbeloppet av hastighetsvektorn $(\cos^2(t)+4)^{1/2}$. Farten är minimal då $\cos(t) = 0$ dvs då $t = \pi/2 + n\pi$. För dessa t-värden är hastighetsvektorn $(0,-2,0)$.

Accelerationsvektorn är $(x'', y'', z'') = (-4cos(2t), -4sin(2t), -sin(t))$. För $t = \pi/2$ får vi $(4,0,-1)$ och för $t = 3\pi/2$ får vi $(4,0,1)$.

Krökningsradien ges nu av $R = \dfrac{|(x',y',z')|^3}{|(x',y',z') \times (x'',y'',z'')|} = \dfrac{2^3}{\sqrt{68}} = 4/\sqrt{17}$.

3. (a) Bestäm allmänna lösningen till

$$y'' + 2y' + 2y = 2e^{-2t}.$$

Lösning:

Karakteristiska ekvationen är $s^2 + 2s + 2 = 0$. Denna har lösningarna $s = -1 + j$ och $s = -1 - j$. Almänna lösningen till den homogena ekvationen är då $y = e^{-t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t)$. Eftersom högerledet inte är en lösning till homogena ekvationen så gör vi en ansats $y_p = Ae^{-2t}$. Insättning i differentialekvationen ger

$(4A - 4A + 2A)e^{-2t} = 2e^{-2t})$. Alltså är $A = 1$ och $y = e^{-t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t) + e^{-2t}$.

(b) Lös, för $t > 0$, begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 2y = e^{-t}\theta(t) \\ y(0-) = 1,\ y'(0-) = -1 \end{cases}$$

med hjälp av laplacetransformering.

Lösning:

Laplacetransformering av ekvationen ger $s^2Y(s) - sy(0-) - y'(0-) + 2(sY(s) - y(0-)) + 2Y(s) = \dfrac{1}{s+1}$. Insättning av begynnelsevärden ger $Y(s) = \dfrac{1}{s+1}$. Inverstransformering ger slutligen $y(t) = e^{-t}$ för $t > 0$.

4. Beräkna gränsvärdet
$$\lim_{x\to 0}\frac{3(3(3((1-x)^{1/3}-1)+x)+x^2)}{1-e^{x(1-\cos(2x))}}.$$
Lösning:
Maclaurinutveckling av nämnaren:
$x(1-\cos(2x)) = x(1-(1-2x^2+2/3x^4+x^5o(1))) = 2x^3+x^4o(1)$.
$1-e^{x(1-\cos(2x))} = 1-e^{2x^3+x^4o(1)} = 1-(1+2x^3+x^4o(1)) = -2x^3+x^4o(1)$.
Maclaurinutveckling av täljaren:
$(1-x)^{1/3} = 1-x/3-x^2/9-5x^3/81+x^3o(1)$.
Detta ger att $3(3(3((1-x)^{1/3}-1)+x)+x^2) = -\dfrac{5}{3}x^3+x^4o(1)$.
Hela uttrycket är $\dfrac{-\frac{5}{3}+xo(1)}{-2+xo(1)}$ och gränsvärdet är $5/6$.

5. Lös ekvationen $(z^6+3z^4+3z^2+9)=0$.
Lösning:
Ekvationen kan skrivas $(z^2+1)^3=-8$. Sätt $w=z^2+1$ och lös ekvationen $w^3=-8$. Denna är en binomisk ekvation med lösningarna $w_k=2e^{j(\pi+2k\pi)/3}, k=0,1,2$. På formen $a+jb$ är dessa lösningar $w_0=2(1/2+j\sqrt{3}/2),\ w_1=-2,\ w_2=2(1/2-j\sqrt{3}/2)$.
Vi har således tre ekvationer $z^2=-1+w_k$ att lösa.
Dessa förenklas till $z^2=-3$ och $z^2=\pm j\sqrt{3}$.
Den första har lösningarna $z=\pm j\sqrt{3}$.
För att lösa de andra sätter vi $z=x+jy$ och får ekvationssystemet
$$\begin{cases} x^2+y^2 &= \sqrt{3} \\ x^2-y^2 &= 0 \\ 2xy &= \pm\sqrt{3} \end{cases}$$
Detta har lösningarna $x=\pm 3^{1/4}/\sqrt{2}, y=\pm 3^{1/4}/\sqrt{2}$ vilket ger $z=(\pm 1\pm j)3^{1/4}/\sqrt{2}$.

6. Funktionen f är deriverbar och positiv för $x>0$. Vidare är $f(1)=3$. För varje $x_0>0$ har triangeln, som begränsas av de positiva koordinataxlarna och tangenten till kurvan $y=f(x)$ i punkten $(x_0,f(x_0))$, dubbelt så stor area som den axelparallella rektangeln med hörn i $(x_0,f(x_0))$ och origo. Bestäm $f(x)$.
Lösning:

Tangentens ekvation är $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$, där $y_0=f(x_0)$.
Denna skär koordinataxlarna i punkterna $(x_1,0)$ och $(0,y_1)$, med $x_1=x_0-\dfrac{y_0}{f'(x_0}$ och $y_1=y_0-f'(x_0)x_0$. Arean av triangeln är $x_1y_1/2$. Rektangelns area är x_0y_0. Vi får således ekvationen
$(x_0-\dfrac{y_0}{f'(x_0})(y_0-f'(x_0)x_0)=4x_0y_0$.
Funktionen $f(x)$ skall alltså satisfiera differentialekvationen
$(x-\dfrac{y}{y'})(y-xy')=4xy$.
Denna förenklas till $(xy'-y)(y-xy')-4xyy'=0$, $2xyy'+x^2y'^2+y^2=0$, $(xy'+y)^2=0$ och slutligen $xy'+y=0$.
Allmän lösning till denna ekvation är $y=C/x$. Villkoret $f(1)=3$ ger $C=3$ och $f(x)=3/x$.